Realizace Dirichletovy podmínky v metodě RKPM

Vratislava Mošová
MVŠO o.p.s.

8. června 2010

Contents

Co je RKPM?

- RKPM (Reproducing Kernel Particle Method) - nesíťová metoda určená k řešení okrajových úloh.
- RKPM je Galerkinova metoda se specielně vytvořenými tvarovými funkcemi.
- Kostrukce RKP-tvarových funkcí má základ v aproximaci jádra integrální transformace

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x, y) u(y) \, \mathrm{d}y.$$

Jak vypadá RKPM?

Okrajová úloha

$$-\Delta u = f \ \text{ na } \Omega \ \ (\Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

$$u = g \ \text{ na } \partial\Omega_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \ \text{ na } \partial\Omega_1$$

Slabá formulace

$$V_g = \{ v \in W^{12}(\Omega) |\ v = g \text{ na } \partial\Omega_0 \}$$

Najít $u \in V_g$ tak, aby

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} h v \, \mathrm{d}s \text{ pro } \forall v \in V_0. \tag{1}$$

Jak vypadá RKPM?

Galerkinova metoda

Najít aproximaci $u_h \in V_g^h \subset V_g$, tak aby

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_1} h v_h \, \mathrm{d}s \text{ pro } \forall v_h \in V_0^h.$$

Contents

Konstukce tvarových funkcí

Co potřebujeme zadat?

- Částice $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$.
- Řád s polynomiální báze $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_l(x))$.
- Jednodimenzionální váhovou funkci Φ_1.

Poznámky

- Pro $s = 2$, $x \in \mathbb{R}^3$, je $p(x) = (1, x_1, x_2, x_3, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2)$.
- Pro $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ definujeme $\Phi(x) = \prod_{i=1}^n \Phi_1(x^i)$ nebo $\Phi(x) = \Phi_1(\|x\|)$.

Konstukce tvarových funkcí

Příklady váhových funkcí

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} e^{(-x/r)^2} & \text{pro} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pro} \quad |x| > 1, \end{cases} \quad , \; r > 0$$

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4x^2 + 4|x|^3 & \text{pro} \quad |x| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} - 4|x| + 4x^2 - \frac{4}{3}|x|^3 & \text{pro} \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pro} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^k & \text{pro} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pro} \quad |x| > 1, \end{cases} \quad , \; k > 1$$

Konstukce tvarových funkcí

Sestavení tvarových funkcí

Tvarové funkce

$$\Psi_I(x) = p\left(\frac{x - x_I}{\rho}\right) b(x)\, \Phi\left(\frac{x - x_I}{\rho}\right) \Delta V_I, \tag{2}$$

kde $\rho > 0$, ΔV_I je kvadraturní váha a funkce $b(x)$ je řešení soustavy

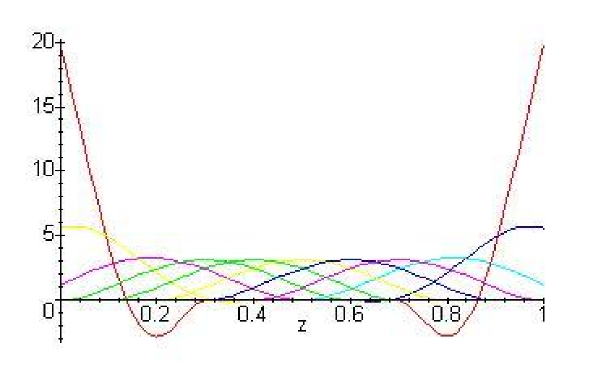
$$M(x)b(x) = p^T(0) \tag{3}$$

s momentovou maticí M o složkách

$$m_{ij} = \sum_{I=1}^{N} p^T\left(\frac{x - x_I}{\rho}\right) p\left(\frac{x - x_I}{\rho}\right) \Phi\left(\frac{x - x_I}{\rho}\right) \Delta V_I \tag{4}$$

Konstukce tvarových funkcí

Grafické zachycení tvarových funkcí Ψ_I pro $N = 11,\ \rho = 0.3,\ p = (1, x),\ \Phi_1 = (1 - x^2)^2$



Řešení okrajové úlohy

Diskretizace v RKPM

$\Psi_I(x)$ - tvarové funkce. Dosazením $\tilde{u} = \sum_{I=1}^{N} \Psi_I(x) u_I$ do (1) obdržíme

$$\int_\Omega \sum_{I=1}^{N} \nabla \Psi_I(x) u_I \nabla \Psi_J(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f \Psi_J(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_1} h \Psi_J(x)\, \mathrm{d}s$$

Tzn. $Au = F$, kde

$$u = (u_1, \dots, u_N)^T,\ A = (A_{IJ}),\ A_{IJ} = \int_\Omega \nabla \Psi_I \nabla \Psi_J \, \mathrm{d}x,$$

$$F = (F_I, \dots, F_N)^T,\ F_J = \int_\Omega f \Psi_J + \int_{\Omega_1} h \Psi_J$$

Problém

- RKPM nereprodukuje přesně Dirichletovu okrajovou podmínku.
- Proč? V některých bodech na hranici je $\Psi_I(x_J) \neq \delta_{IJ}$.
- Tzn. $\tilde{u}(x_J) = \sum_I \Psi_I(x_J) u_I \neq u(x_J)$ není striktním interpolantem.
- Co se dá dělat?

Contents

Metoda váhových funkcí

- Úprava tvarové funkce pomocí funkce

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ blízko hranice } \partial\Omega_0 \\ 1 & \text{pro ostatní } x \end{cases}$$

- **Nevýhody:**
  Někdy přidaná funkce w zhorší hladkost řešení.
  Komplikuje se kód algoritmu.
- **Výhody:**
  Jednoduchost základní myšlenky.

Transformační metoda

- RKP aproximace $\tilde{u}(x) = \sum_{I=1}^{N} \Psi_I(x) u_I$. Mezi reálnými hodnotami aproximace $\tilde{u}(x_J)$ a fiktivními uzlovými parametry u_I platí

  $$\tilde{u}(x_J) = \sum_{I=1}^{N} \Psi_I(x_J) u_I.$$

  Označme $T_{IJ} = \Psi_I(x_J)$, pak $\tilde{u} = Tu$.
  Pokud $T = (T_{IJ})$ je regulární, existuje T^{-1} tak, že $T^{-1}\tilde{u} = u$ t.j.

  $$\sum_{J=1}^{N} T_{JI}^{-1} \tilde{u}_J = u_I$$

Transformační metoda

- Pro aproximaci $\tilde{u}(x)$ pak máme

$$\tilde{u}(x) = \sum_{I=1}^{N} \Psi_I(x) u_I = \sum_{I=1}^{N} \Psi_I(x) \sum_{J=1}^{N} T_{JI}^{-1} \tilde{u}_J =$$

$$= \sum_{J=1}^{N} \Big(\sum_{I=1}^{N} \Psi_I(x) T_{IJ}^{-1} \Big) \tilde{u}_J = \sum_{J=1}^{N} \tilde{\Psi}_J(x) \tilde{u}_J.$$

Transformační metoda

- **Nevýhody:**
  T nesmí být singulární.
  Matice T je plná.
- **Výhody:**
  Metoda dává globální výsledky.
  Funkce $\tilde{\Phi}_J(x)$ mají vlastnost Kroneckerova delta.
  Dirichletova podmínka je splněna přesně.

Metoda Lagrangeových multiplikátorù

- Zabudování Dirichletovy podmínky do slabé formulace problému.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega_0} \lambda v \,\mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega_1} h v \,\mathrm{d}s = 0$$

$$\int_{\partial\Omega_0} (u - g) \,\mathrm{d}s = 0$$

- **Nevýhody:**
  Větší počet proměnných.
  Dirichletova podmínka není splněna přesně.
- **Výhody:**
  Lze použít pro libovolný variační přístup.

Contents

Shrnutí

- RKP-tvarové funkce a Kroneckerova podmínka
- Řešení problému
  [i] Metody založené na změně váhové funkce (metoda váhových funkcí, transformační metoda).
  [ii] Metoda, která vychází z variační formulace (metoda Lagrangeových multiplikátorù).

Literatura

- I. Babuška, U. Banerjee, J.E. Osborn, Survey of meshless and generalized finite element mehods: Anunified approach, Acta Numer. (2003) 1-125
- J.S. Chen, C. Pan, C.T. Wu, W.K. Liu, Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 195-227
- J.S. Chen, C. Pan, C.T. Wu, Large deformation analysiss of rubber based on a reproducing kernel particle methods, Comput. Mech. 19 (1997) 211-227
- W.K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee, T. Belytschko, Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 38 (1999) 1655-1679
- J.J. Monaghan, Why Particle Methods Work. Sci. Stat. Comput. 3, No. 4 (1982) 422-433

Děkuji za pozornost.

email:vratislava.mosova@mvso.cz

Metoda Lagrangeových multiplikátorù

- $$F(u,\lambda) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(\nabla u)^2 - fu\right)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega_1} hu\,\mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega_0} \lambda(u-g)\,\mathrm{d}s$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_0} u\,\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_0} \lambda v\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_1} hv\,\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_0} g\,\mathrm{d}s$$

Metoda Lagrangeových multiplikátorù

- Obržíme soustavu lineárních rovnic $Au = F$, kde

$$u = (c_1, \ldots, c_N, \lambda)^T, \; A = \begin{pmatrix} H & G \\ G^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{IJ} = \int_\Omega (\nabla\Psi_I \nabla\Psi_J + \nabla\Psi_I), \; G_I = \int_{\partial\Omega_0} \Psi_I$$

$$F_I = \int_\Omega f\Psi_I + \int_{\Omega_1} h\Psi_I + \int_{\partial\Omega_0} g$$