Interakce stlačitelného proudění a profilu

Jan Česenek, Miloslav Feistauer

Matematicko-fyzikální fakulta, UK v Praze

Osnova

- Systém Navier-Stokesových rovnic
- Diskretizace
- Interakce
- Numerické experimenty
- Závěr

Systém Navier-Stokesových rovnic

Uvažujme stlačitelné vazké proudění v omezené oblasti $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ kde

- $(0, T)$ je časový interval
- $\Omega(t)$ oblast vyplněna vzduchem v čase t.

Hranice oblasti $\Omega(t)$ se skládá ze tří různých částí $\partial\Omega(t) = \Gamma_I \cup \Gamma_O \cup \Gamma_W(t)$ kde

- Γ_I = Vstup
- Γ_O = Výstup
- $\Gamma_W(t)$ = Nepropustná stěna

System Navier-Stokesovych rovnic

2D systém Navier-Stokesových rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} &= \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s} \\ \mathbf{w}(x,0) &= \mathbf{w}^0(x) \quad x \in \Omega(0) \end{aligned}$$

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, E)^T \in I\!R^4$
- $\mathbf{w}^0(x) =$ počáteční podmínka

$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ - rychlost, ρ - hustota, p - tlak, E - celková energie.

Systém Navier-Stokesových rovnic

- Nevazké členy $\mathbf{f}_s(\mathbf{w})$

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = (\rho v_s, \rho v_1 v_s + \delta_{1s} p, \rho v_2 v_s + \delta_{2s} p, (E+p) v_s)^T$$

- Vazké členy $\mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})$

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \left(0, \tau^V_{1s}, \tau^V_{2s}, \tau^V_{1s} v_1 + \tau^V_{2s} v_2 + \frac{\gamma}{Re\ Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x_s}\right)^T,$$

kde $$\tau^V_{rs} = \frac{1}{Re} \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_r} \right) - \frac{2}{3} div \mathbf{v} \delta_{ij} \right\}$$

- K systému rovnic přidáváme termodynamické vztahy:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right), \qquad E = c_V \rho \theta + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2$$

Systém Navier-Stokesových rovnic

- Nevazké členy $\mathbf{f}_s$ jsou homogenní

$$\mathbf{f}_s(\alpha\mathbf{w}) = \alpha\ \mathbf{f}_s(\mathbf{w})$$

Potom

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbf{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w},$$

kde

$$\mathbf{A}_s = \frac{D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}}, \quad s = 1, 2.$$

- Vazké členy $\mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla\mathbf{w})$

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^{2} \mathbf{K}_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k}$$

ALE-zobrazení

Z důvodu časové závistlosti oblasti $\Omega(t)$ definujeme tzv. ALE-zobrazení: $\mathcal{A}_t$

$$\mathcal{A}_t : \overline{\Omega}(0) \to \overline{\Omega}(t), \quad t \in [0, T],$$

- $\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathcal{A}_t(\mathbf{X})}{\partial t}$ ALE-rychlost v referenčním bodě $\mathbf{X} \in \Omega(0)$
- $\mathbf{z}(x, t) = \tilde{\mathbf{z}}(\mathcal{A}_t^{-1}(x), t)$ ALE-rychlost v bodě $x \in \Omega(t)$

ALE-zobrazení

Definujeme ALE-derivaci funkce $\mathbf{w}$ v bodě $x = \mathcal{A}_t(\mathbf{X})$ $t \in (0, T)$

$$\frac{D^{\mathcal{A}}\mathbf{w}(x,t)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t)$$

Lze ukázat, že

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} &= \frac{D^{\mathcal{A}}\mathbf{w}}{Dt} - (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{w} \\ &= \frac{D^{\mathcal{A}}\mathbf{w}}{Dt} + \mathbf{w}\,div(\mathbf{z}) - div(\mathbf{w}\otimes\mathbf{z})\end{aligned}$$

Ale-zobrazení

- Formulace Navier-Stokesových rovnic pomocí ALE-zobrazení

$$\frac{D^{\mathcal{A}}\mathbf{w}}{Dt} + \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{g}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} + \mathbf{w} div(\mathbf{z}) = \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s}$$

$$\text{k}de \quad \mathbf{g}_s(\mathbf{w}) = \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) - z_s \mathbf{w}, \;\; s = 1, 2.$$

Diskretizace - Triangulace

- $\Omega_h(t)$ polygonální aproximace oblasti $\Omega(t)$
- $\mathcal{T}_h(t) = \{K_i\}_{i \in I(t)}$ je triangulace oblasti $\Omega_h(t)$ skládající se z trojúhelníků K_i, kde $K_i^o \cap K_j^o = \emptyset$ pro $i \neq j$
- $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ je buď společná hrana sousedících elementů K_i a K_j nebo $\Gamma_{ij} \subset \partial\Omega_h(t)$ kde Γ_{ij} je hrana K_i and $j \in \gamma(t)$ (indexová množina hran na hranici oblasti), $\gamma(t) = \gamma_D(t) \cup \gamma_N(t)$
- indexová množina $s(i)(t) = \{j \in I(t); K_j \text{ je soused } K_i\}$
- $\mathbf{n}_{ij} = ((n_{ij})_1, (n_{ij})_2)$ vnější jednotková normála k ∂K_i na hraně Γ_{ij}

Diskretizace

Přibližné řešení budeme hledat v prostoru:

$$\mathbf{S}_h(t) = (S_h(t))^4, \qquad \text{kde } S_h(t) = \{v; v|_K \in P^r(K), \forall K \in \mathcal{T}_h(t)\}$$

Předpokládáme, že $r \geq 0$ a $P^r(K)$ je prostor polynomů stupně nejvýše r na K.

- $v|_{\Gamma_{ij}}$ je stopa $v|_{K_i}$ na hraně Γ_{ij}
- skok: $[v]_{\Gamma_{ij}} = v|_{\Gamma_{ij}} - v|_{\Gamma_{ji}}$
- průměr: $\langle v \rangle_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{2}\left(v|_{\Gamma_{ij}} + v|_{\Gamma_{ji}}\right)$.

Diskretizace

Diskretizace problému. Zvolíme libovolné $t \in (0, T)$

- násobíme systém testovací funkcí $\varphi_h \in \mathbf{S}_h(t)$
- integrujeme přes K_i
- aplikujeme Greenovu větu na K_i
- a sečteme přes všechna $i \in I(t)$

Diskretizace - Nevazké členy

- Nevazké členy násobíme $\varphi_h \in \mathbf{S_h}$ a použijeme Greenovu větu

$$\tilde{b}_h(\mathbf{w}, \varphi_h) = -\sum_{i \in I(t)} \int_{K_i} \sum_{s=1}^{2} \mathbf{g}_s(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_s} \, \mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{i \in I(t)} \sum_{i \in S(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \mathbf{g}_s(\mathbf{w}) (n_{ij})_s \, \mathrm{d}S$$

- Nevazké členy na Γ_{ij} aproximujeme tzv. numerickým tokem $\mathbf{H_g}$

$$\int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \mathbf{g}_s(\mathbf{w}) (n_{ij})_s \, \mathrm{d}S \approx \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{H_g}(\mathbf{w}|_{\Gamma_{ij}}, \mathbf{w}|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij})$$

Diskretizace - Vazké členy

$$\tilde{a}_h(\mathbf{w},\varphi_h) = -\sum_{i\in I(t)} \int_{\mathbf{K}_i} \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} K_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_s}\, \mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{i\in I(t)} \sum_{\substack{j\in s(t)(i)\\ j<i}} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \left\langle \sum_{k=1}^{2} K_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \right\rangle (n_{ij})_s \cdot [\varphi_h]\, \mathrm{d}S$$

$$+ \sum_{i\in I(t)} \sum_{j\in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} K_{s,k}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} (n_{ij})_s \cdot \varphi_h\, \mathrm{d}S$$

$$+ \Theta \sum_{i\in I(t)} \sum_{\substack{j\in s(t)(i)\\ j<i}} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \left\langle \sum_{k=1}^{2} K_{k,s}^{T}(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} \right\rangle (n_{ij})_s \cdot [\mathbf{w}]\, \mathrm{d}S$$

$$+ \Theta \sum_{i\in I(t)} \sum_{j\in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} K_{k,s}^{T}(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} (n_{ij})_s \cdot \mathbf{w}\, \mathrm{d}S$$

- $\Theta = 1$ pro SIPG, $\Theta = -1$ pro NIPG, $\Theta = 0$ pro IIPG

Diskretizace - Penalizační člen

$$
\begin{aligned}
J_h^\sigma(\mathbf{w}, \varphi_h) &= \sum_{i \in I(t)} \sum_{\substack{j \in s(t)(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma [\mathbf{w}] \cdot [\varphi_h] \, \mathrm{d}S \\
&+ \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma \mathbf{w} \cdot \varphi_h \, \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

- $\sigma|_{\Gamma_{ij}} = \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij}) Re}$, kde $C_W > 0$ je vhodná konstanta.

Diskretizace - Pravá strana

$$
\begin{aligned}
\tilde{l}_h(\mathbf{w}, \varphi_h) &= \Theta \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} K^T_{k,s}(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} (n_{ij})_s \cdot \mathbf{w}_B \, \mathrm{d}S \\
&+ \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma \mathbf{w}_B \cdot \varphi_h \, \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

- kde $\mathbf{w}_B$ je stav definovaný pomocí Dirichletových okrajových podmínek a extrapolace.

Diskretizace

Přibližné řešení je definováno jako funkce $\mathbf{w}_h(t) \in \mathbf{S}_h(t)$ splňující pro libovolné $t \in (0, T)$

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{D^{\mathcal{A}} \mathbf{w}_h(t)}{Dt}, \varphi_h \right) - ((\mathbf{z}(t) \cdot \nabla) \mathbf{w}_h(t), \varphi_h) + b_h(\mathbf{w}_h(t), \varphi_h) \\
& + \tilde{a}_h(\mathbf{w}_h(t), \varphi_h) + J_h^{\sigma}(\mathbf{w}_h(t), \varphi_h) \\
= \; & \tilde{l}_h(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in \mathbf{S}_h(t), \;\; t \in (0, T) \\
& \mathbf{w}_h(0) = \mathbf{w}_h^0.
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{w}_h^0$ je $\mathbf{S}_h(0)$-aproximace $\mathbf{w}^0$:

$$
(\mathbf{w}_h^0, \varphi_h) = (\mathbf{w}^0, \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in \mathbf{S}_h(0).
$$

Časová diskretizace

Nechť $0 = t_0 < t_1 < \dots t_M$ je dělení časového intervalu $[0, T]$, $t_k = k\tau, \tau > 0$.
Aproximujeme ALE-derivaci za použití zpětné Eulerovy diference.

$$\left(\frac{D^{\mathcal{A}} \mathbf{w}_h(x,t)}{Dt}, \varphi_h \right)\Big|_{t_{k+1}} \approx \left(\frac{\mathbf{w}(x, t_{k+1}) - \hat{\mathbf{w}}_h^k(x)}{\tau}, \varphi_h \right)$$

kde

$$\hat{\mathbf{w}}_h^j(x) = \mathbf{w}_h(\mathcal{A}_{t_j}(\mathcal{A}_{t_{k+1}}^{-1}(x)), t_j), \quad x \in \Omega_h(t_{k+1}).$$

Linearizace - Nevazké členy

Linearizace členu $\tilde{b}_h(\mathbf{w}, \varphi_h)$. Využíváme homogenity $\mathbf{f}_s$

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{i \in I(t)} \int_{K_i} \sum_{s=1}^{2} \mathbf{g}_s(\mathbf{w}) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_s} \, \mathrm{d}x \\
\approx \quad & \sigma_1 := - \sum_{i \in I(t_{k+1})} \int_{K_i} \sum_{s=1}^{2} \Big(\mathbf{A}_s(\hat{\mathbf{w}}_h^k) - z_s \mathbf{I} \Big) \, \mathbf{w}_h^{k+1} \cdot \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_s} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Linearizace - Nevazké členy

Linearizace numerického toku $\mathbf{H_g}$. Definujeme

$$\mathbf{P}(\mathbf{w},\mathbf{n}) := \sum_{s=1}^{2} (\mathbf{A}_s(\mathbf{w}) - z_s \mathbf{I})\, n_s, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2), n_1^2 + n_2^2 = 1$$

- $\mathbf{P}(\mathbf{w},\mathbf{n})$ je diagonalizovatelná ($\mathbf{P} = \mathbf{TDT^{-1}}$)
- $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_4)$
- $\mathbf{D}^{\pm} = diag(\lambda_1^{\pm}, ..., \lambda_4^{\pm})$, kde $\lambda^+ = max(0,\lambda), \lambda^- = min(0,\lambda)$
- $\mathbf{P}^{\pm} = \mathbf{TD}^{\pm}\mathbf{T}^{-1}$

Linearizace - Nevazké členy

Pro linearizaci volíme tzv. Vijayasundaram numerický tok definován

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_V(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n}) &= \mathbf{P}^+\left(\frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2}{2}, \mathbf{n}\right)\mathbf{w}_1 \\ &+ \mathbf{P}^-\left(\frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2}{2}, \mathbf{n}\right)\mathbf{w}_2.\end{aligned}$$

- Lipschitzovsky spojitý
- konzistentní: $\mathbf{H}_V(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^{2} \mathbf{g}_s(\mathbf{w}_1) n_s \mathbf{w}_1$
- konzervativní: $\mathbf{H}_V(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n}) = -\mathbf{H}_V(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, -\mathbf{n})$

Linearizace - Nevazké členy

$$\sum_{i\in I(t)}\sum_{j\in S(i)(t)}\int_{\Gamma_{ij}}\sum_{s=1}^{2} g_s(\mathbf{w})(n_{ij})_s \,\mathrm{d}S \approx$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 \quad := & \sum_{i\in I(t)}\sum_{j\in S(i)(t_{k+1})}\int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{P}^{+}\left(\frac{\hat{\mathbf{w}}_h^k|_{\Gamma_{ij}} + \hat{\mathbf{w}}_h^k|_{\Gamma_{ji}}}{2}, \mathbf{n}_{ij}\right)\mathbf{w}_h^{k+1}|_{\Gamma_{ij}} \cdot \varphi_h \ \ \mathrm{d}S \\ & + \sum_{i\in I(t)}\sum_{j\in S(i)(t_{k+1})}\int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{P}^{-}\left(\frac{\hat{\mathbf{w}}_h^k|_{\Gamma_{ij}} + \hat{\mathbf{w}}_h^k|_{\Gamma_{ji}}}{2}, \mathbf{n}_{ij}\right)\mathbf{w}_h^{k+1}|_{\Gamma_{ji}} \cdot \varphi_h \ \mathrm{d}S\end{aligned}$$

Potom definujeme formu

$$\mathbf{b}_h(\hat{\mathbf{w}}_h^k, \mathbf{w}_h^{k+1}, \varphi_h) = \sigma_1 + \sigma_2$$

Linearizace - Vazké členy

$$a_h(\hat{\mathbf{w}}_h^k, \mathbf{w}_h^{k+1} \varphi_h) = -\sum_{i \in I(t)} \int_{\mathbf{K}_i} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} K_{s,k}(\hat{\mathbf{w}}_h^k) \frac{\partial \mathbf{w}_h^{k+1}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_s} \,\mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{i \in I(t)} \sum_{\substack{j \in s(t)(i) \\ j<i}} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \left\langle \sum_{k=1}^{2} K_{s,k}(\hat{\mathbf{w}}_h^k) \frac{\partial \mathbf{w}_h^{k+1}}{\partial x_k} \right\rangle (n_{ij})_s \cdot [\varphi_h] \,\mathrm{d}S$$

$$+ \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} K_{s,k}(\hat{\mathbf{w}}_h^k) \frac{\partial \mathbf{w}_h^{k+1}}{\partial x_k} (n_{ij})_s \cdot \varphi_h \,\mathrm{d}S$$

$$+ \Theta \sum_{i \in I(t)} \sum_{\substack{j \in s(t)(i) \\ j<i}} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \left\langle \sum_{k=1}^{2} K_{k,s}^T(\hat{\mathbf{w}}_h^k) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} \right\rangle (n_{ij})_s \cdot [\mathbf{w}_h^{k+1}] \,\mathrm{d}S$$

$$+ \Theta \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} K_{k,s}^T(\hat{\mathbf{w}}_h^k) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} (n_{ij})_s \cdot \mathbf{w}_h^{k+1} \,\mathrm{d}S$$

Linearizace - Pravá strana

Linearizace pravé strany.

$$
\begin{aligned}
& l_h(\hat{\mathbf{w}}_h^k, \varphi_h) \\
= \quad & \Theta \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} K_{k,s}^T(\hat{\mathbf{w}}_h^k) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} (n_{ij})_s \cdot \mathbf{w}_B^{k+1} \,\mathrm{d}S \\
& + \sum_{i \in I(t)} \sum_{j \in \gamma_D(i)(t)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h(\Gamma_{ij}) Re} \mathbf{w}_B^{k+1} \cdot \varphi_h \,\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

Diskretizace

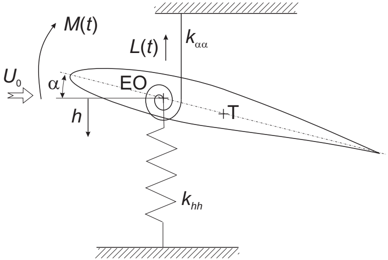
Přibližné řešení v čase t_{k+1} definujeme

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{w}_h^{k+1} \in \mathbf{S}_h(t_{k+1}) \\
& \left(\frac{\mathbf{w}_h^{k+1} - \hat{\mathbf{w}}_h^k}{\tau}, \varphi_h \right) - \left((\mathbf{z}(t_{k+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_h^{k+1}, \varphi_h \right) \\
& + b_h(\hat{\mathbf{w}}_h^k, \mathbf{w}_h^{k+1}, \varphi_h) + a_h(\hat{\mathbf{w}}_h^k, \mathbf{w}_h^{k+1}, \varphi_h) + J_h^\sigma(\mathbf{w}_h^{k+1}, \varphi_h) \\
= \quad & l_h(\hat{\mathbf{w}}_h^k, \varphi_h) \qquad \forall \varphi_h \in \mathbf{S}_h(t_{k+1}),
\end{aligned}
$$

Interakce

Budeme simulovat nasledující situaci profilu s dvěma stupni volnosti

- h vertikální posun elastické osy
- α úhel rotace kolem elastické osy



Interakce

Pohyb profilu je popsán systémem obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + k_{hh}h + S_\alpha\ddot{\alpha} + d_{hh}\dot{h} &= -L(t) \\ S_\alpha\ddot{h} + I_\alpha h + k_{\alpha\alpha} + d_{\alpha\alpha}\ddot{\alpha} &= M(t) \end{aligned}$$

- m hmotnost profilu
- S_α statický moment vzhledem k elastické ose
- I_α moment setrvačnosti vzhledem k elastické ose
- k_{hh} tuhost v posunutí
- $k_{\alpha\alpha}$ tuhost v torzi
- d_{hh} strukturální tlumení v ohybu
- $d_{\alpha\alpha}$ strukturální tlumení v torzi

Interakce

- Vztlaková síla

$$L(t) = -l \int_{\Gamma_{W(t)}} \sum_{j=1}^{2} \tau_{2j} n_j \, \mathrm{d}S$$

- Moment otáčení

$$M(t) = l \int_{\Gamma_{W(t)}} \sum_{i,j=1}^{2} \tau_{ij} n_j (-1)^i \left(x_{1+\delta_{1i}} - x_{1+\delta_{1i}}^{EO} \right) \, \mathrm{d}S$$

kde

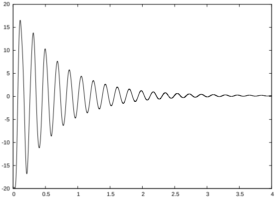
$$\tau_{ij} = -\delta_{ij} p + \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} div \mathbf{v} \delta_{ij} \right\}$$

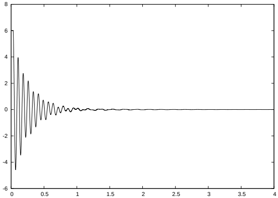
Numerické experimenty

Numerický experiment s nasledujícími parametry

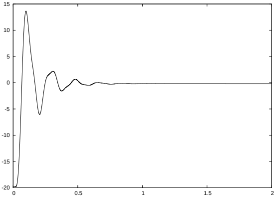
- Počáteční výchylka ve vertikálním směru $h_0 = -20$ mm
- Počáteční úhel otočení $\alpha_0 = 6^o$
- Délka profilu $L = 0.3$

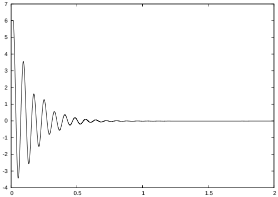
Numerické experimenty





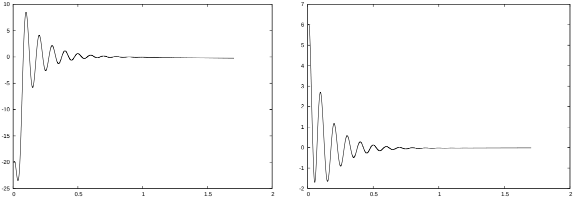
v=10 m/s $\quad t \in [0, 4]$



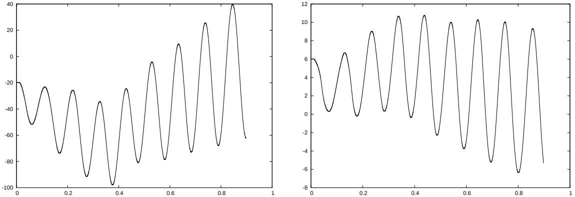


v=20 m/s $\quad t \in [0, 2]$

Numerické experimenty



v=30 m/s $\quad t \in [0, 2]$



v=40 m/s $\quad t \in [0, 1]$

Řešení-tlak

Triangulace

Závěr

- DGFEM s ALE-zobrazení = robustní metoda pro řešení stlačitelného vazkého proudění v časově závislých oblastech

Náměty na další práci:

- Uvažovat turbulentní model