INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vývoj aproximačních technik pro řešení problémů dynamiky tekutin

Od lokálních ke globálním modelům

Marek Brandner, Stanislav Míka

Katedra matematiky, NTIS – Nové technologie pro informační společnost, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni

červen 2012

Úvod

Motivace přednášky:

- Podchycení (některých) klíčových myšlenek v oblasti výpočetní dynamiky tekutin
- Soustředíme se na ty ideje, které vedly k současné podobě metody konečných objemů (tak, jak ji chápeme my).
- Pro zlepšení přehlednosti budeme občas provádět skoky na časové ose.
- Budeme zdůrazňovat pouze základní matematické myšlenky, řadu (důležitých) detailů zamlčíme.

Úvod

Motivace přednášky:

- Podchycení (některých) klíčových myšlenek v oblasti výpočetní dynamiky tekutin
- Soustředíme se na ty ideje, které vedly k současné podobě metody konečných objemů (tak, jak ji chápeme my).
- Pro zlepšení přehlednosti budeme občas provádět skoky na časové ose.
- Budeme zdůrazňovat pouze základní matematické myšlenky, řadu (důležitých) detailů zamlčíme.

Úvod

Motivace přednášky:

- Podchycení (některých) klíčových myšlenek v oblasti výpočetní dynamiky tekutin
- Soustředíme se na ty ideje, které vedly k současné podobě metody konečných objemů (tak, jak ji chápeme my).
- Pro zlepšení přehlednosti budeme občas provádět skoky na časové ose.
- Budeme zdůrazňovat pouze základní matematické myšlenky, řadu (důležitých) detailů zamlčíme.

Úvod

Motivace přednášky:

- Podchycení (některých) klíčových myšlenek v oblasti výpočetní dynamiky tekutin
- Soustředíme se na ty ideje, které vedly k současné podobě metody konečných objemů (tak, jak ji chápeme my).
- Pro zlepšení přehlednosti budeme občas provádět skoky na časové ose.
- Budeme zdůrazňovat pouze základní matematické myšlenky, řadu (důležitých) detailů zamlčíme.

Formulace problémů

- Základem je matematický model dynamiky (ne)vazkých tekutin, transportu částic a řady dalších jevů popsatelných pomocí zákonů zachování (bilančních zákonů).
- Formulujeme počátečně-okrajové úlohy pro některou z níže uvedených rovnic

$$q_t + aq_x = 0,$$

$$q_t + aq_x + bq_y = 0,$$

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x + \mathbf{B}\mathbf{q}_y = \mathbf{0},$$

$$q_t + [f(q)]_x = 0,$$

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x + [\mathbf{g}(\mathbf{q})]_y = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x + [\mathbf{g}(\mathbf{q})]_y = \varepsilon\mathbf{q}_{xx}.$$

Formulace problémů

- Základem je matematický model dynamiky (ne)vazkých tekutin, transportu částic a řady dalších jevů popsatelných pomocí zákonů zachování (bilančních zákonů).
- Formulujeme počátečně-okrajové úlohy pro některou z níže uvedených rovnic

$$q_t + aq_x = 0,$$

$$q_t + aq_x + bq_y = 0,$$

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x + \mathbf{B}\mathbf{q}_y = \mathbf{0},$$

$$q_t + [f(q)]_x = 0,$$

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x + [\mathbf{g}(\mathbf{q})]_y = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x + [\mathbf{g}(\mathbf{q})]_y = \varepsilon \mathbf{q}_{xx}.$$

Formulace problémů

$$\begin{aligned} q_t + a q_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ q(x,0) &= q_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Zkoumáme řešení $q = q(x(t), t)$ na křivkách $x = x(t)$. Volíme speciálně

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x = at + C, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

$$q(x,t) = q_0(x - at)$$

$$q_t + [f(q)]_x = 0, \quad q_t + f'(q) q_x = 0$$

$$x_j = j\Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \Delta x > 0, \quad t_n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \Delta t > 0$$

$$x_{j+1/2} = x_j + \Delta t/2$$

$$Q_j^n \approx q_j^n = q(x_j, t_n)$$

Formulace problémů

$$\begin{aligned} q_t + a q_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ q(x,0) &= q_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Zkoumáme řešení $q = q(x(t), t)$ na křivkách $x = x(t)$. Volíme speciálně

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x = at + C, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

$$q(x,t) = q_0(x - at)$$

$$q_t + [f(q)]_x = 0, \quad q_t + f'(q) q_x = 0$$

$$x_j = j\Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \Delta x > 0, \quad t_n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \Delta t > 0$$

$$x_{j+1/2} = x_j + \Delta t/2$$

$$Q_j^n \approx q_j^n = q(x_j, t_n)$$

Formulace problémů

$$
\begin{aligned}
q_t + a q_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\
q(x,0) &= q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Zkoumáme řešení $q = q(x(t), t)$ na křivkách $x = x(t)$. Volíme speciálně

$$
\frac{dx}{dt} = a, \quad x = at + C, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0
$$

$$
q(x,t) = q_0(x - at)
$$

$$
q_t + [f(q)]_x = 0, \quad q_t + f'(q) q_x = 0
$$

$$
x_j = j\Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \Delta x > 0, \quad t_n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \Delta t > 0
$$

$$
x_{j+1/2} = x_j + \Delta t/2
$$

$$
Q_j^n \approx q_j^n = q(x_j, t_n)
$$

Formulace problémů

$$
\begin{aligned}
q_t + a q_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\
q(x,0) &= q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Zkoumáme řešení $q = q(x(t), t)$ na křivkách $x = x(t)$. Volíme speciálně

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x = at + C, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

$$q(x,t) = q_0(x - at)$$

$$q_t + [f(q)]_x = 0, \quad q_t + f'(q) q_x = 0$$

$$x_j = j\Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \Delta x > 0, \quad t_n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \Delta t > 0$$

$$x_{j+1/2} = x_j + \Delta t/2$$

$$Q_j^n \approx q_j^n = q(x_j, t_n)$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- K výraznému rozvoji metody konečných diferencí v oblasti dynamiky tekutin dochází během druhé světové války a těsně po ní.
- Nejdříve rozpracovány diferenční aproximace a teorie pro případ lineárních rovnic (s konstantními koeficienty).
- Rozvíjeny metody explicitní, implicitní, jednokrokové, vícekrokové …
- Byla zavedena konzistence (s příslušnou diferenciální rovnicí), řád, stabilita (lineární Richtmyerova) a konvergence (Laxova věta). Nutná podmínka stability – Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka (R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mathematische Annalen 100 (1928),32-74).

Metoda konečných diferencí – přehled

- K výraznému rozvoji metody konečných diferencí v oblasti dynamiky tekutin dochází během druhé světové války a těsně po ní.
- Nejdříve rozpracovány diferenční aproximace a teorie pro případ lineárních rovnic (s konstantními koeficienty).
- Rozvíjeny metody explicitní, implicitní, jednokrokové, vícekrokové ...
- Byla zavedena konzistence (s příslušnou diferenciální rovnicí), řád, stabilita (lineární Richtmyerova) a konvergence (Laxova věta). Nutná podmínka stability – Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka (R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mathematische Annalen 100 (1928),32-74).

Metoda konečných diferencí – přehled

- K výraznému rozvoji metody konečných diferencí v oblasti dynamiky tekutin dochází během druhé světové války a těsně po ní.
- Nejdříve rozpracovány diferenční aproximace a teorie pro případ lineárních rovnic (s konstantními koeficienty).
- Rozvíjeny metody explicitní, implicitní, jednokrokové, vícekrokové …
- Byla zavedena konzistence (s příslušnou diferenciální rovnicí), řád, stabilita (lineární Richtmyerova) a konvergence (Laxova věta). Nutná podmínka stability – Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka (R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mathematische Annalen 100 (1928),32-74).

Metoda konečných diferencí – přehled

- K výraznému rozvoji metody konečných diferencí v oblasti dynamiky tekutin dochází během druhé světové války a těsně po ní.
- Nejdříve rozpracovány diferenční aproximace a teorie pro případ lineárních rovnic (s konstantními koeficienty).
- Rozvíjeny metody explicitní, implicitní, jednokrokové, vícekrokové …
- Byla zavedena konzistence (s příslušnou diferenciální rovnicí), řád, stabilita (lineární Richtmyerova) a konvergence (Laxova věta). Nutná podmínka stability – Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka (R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mathematische Annalen 100 (1928),32-74).

Metoda konečných diferencí – přehled

- Byla vyvinuta řada diskrétních aproximací:
  - Laxova-Friedrichsova
  - Laxova-Wendroffova
  - MacCormackova
  - Richtmyerova
  - metoda typu leap frog
- Testovány pro lineární i nelineární úlohy s hladkým i nehladkým řešením. Závěr: pro nehladký případ nejsou příliš vhodné.
- Pro nelineární úlohy zavádíme zobecněné řešení (může obsahovat rázové vlny, vlny zředění, kontaktní nespojitosti). Při zkoumání PDR je vhodné brát ohled na související fyzikální principy.

Metoda konečných diferencí – přehled

- Byla vyvinuta řada diskrétních aproximací:
    - Laxova-Friedrichsova
    - Laxova-Wendroffova
    - MacCormackova
    - Richtmyerova
    - metoda typu leap frog
- Testovány pro lineární i nelineární úlohy s hladkým i nehladkým řešením. Závěr: pro nehladký případ nejsou příliš vhodné.
- Pro nelineární úlohy zavádíme zobecněné řešení (může obsahovat rázové vlny, vlny zředění, kontaktní nespojitosti). Při zkoumání PDR je vhodné brát ohled na související fyzikální principy.

Metoda konečných diferencí – přehled

- Speciálně připomeneme 3 metody, které obsahují zárodky obecnějších přístupů.
- Courantova-Isaacsonova-Reesova metoda (R. Courant, E. Isaacson, M. Rees: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences, Communications on Pure and Applied Mathematics 5 (1952)).
  - $$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)(Q_j^n - Q_{j-1}^n), \quad f'(Q_j^n) > 0, \\ Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)(Q_{j+1}^n - Q_j^n), \quad f'(Q_j^n) < 0 \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)\right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n) Q_{j-1}^n, \quad f'(Q_j^n) > 0, \\ Q_j^{n+1} &= Q_j^n \left[1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n) Q_{j+1}^n, \quad f'(Q_j^n) < 0 \end{aligned}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Speciálně připomeneme 3 metody, které obsahují zárodky obecnějších přístupů.
- Courantova-Isaacsonova-Reesova metoda (R. Courant, E. Isaacson, M. Rees: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences, Communications on Pure and Applied Mathematics 5 (1952)).
-

$$
\begin{aligned}
Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)(Q_j^n - Q_{j-1}^n), \quad & f'(Q_j^n) > 0, \\
Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)(Q_{j+1}^n - Q_j^n), \quad & f'(Q_j^n) < 0
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
Q_j^{n+1} &= Q_j^n \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)\right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n) Q_{j-1}^n, \quad & f'(Q_j^n) > 0, \\
Q_j^{n+1} &= Q_j^n \left[1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n) Q_{j+1}^n, \quad & f'(Q_j^n) < 0
\end{aligned}
$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Speciálně připomeneme 3 metody, které obsahují zárodky obecnějších přístupů.
- Courantova-Isaacsonova-Reesova metoda (R. Courant, E. Isaacson, M. Rees: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences, Communications on Pure and Applied Mathematics 5 (1952)).
  - $$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)(Q_j^n - Q_{j-1}^n), & f'(Q_j^n) > 0, \\ Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)(Q_{j+1}^n - Q_j^n), & f'(Q_j^n) < 0 \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)\right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n) Q_{j-1}^n, & f'(Q_j^n) > 0, \\ Q_j^{n+1} &= Q_j^n \left[1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n) Q_{j+1}^n, & f'(Q_j^n) < 0 \end{aligned}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Speciálně připomeneme 3 metody, které obsahují zárodky obecnějších přístupů.
- Courantova-Isaacsonova-Reesova metoda (R. Courant, E. Isaacson, M. Rees: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences, Communications on Pure and Applied Mathematics 5 (1952)).
  - $$\begin{array}{rcll} Q_j^{n+1} & = & Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)(Q_j^n - Q_{j-1}^n), & f'(Q_j^n) > 0, \\ Q_j^{n+1} & = & Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)(Q_{j+1}^n - Q_j^n), & f'(Q_j^n) < 0 \end{array}$$
  - $$\begin{array}{rcll} Q_j^{n+1} & = & Q_j^n \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)\right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n) Q_{j-1}^n, & f'(Q_j^n) > 0, \\ Q_j^{n+1} & = & Q_j^n \left[1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n)\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(Q_j^n) Q_{j+1}^n, & f'(Q_j^n) < 0 \end{array}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Metoda typu upwind (upstream) (R. Richtmyer, K. Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience, New York, 1957).
- Metodu naznačíme na příkladu zákona zachování hmotnosti

$$\varrho_t + (u\varrho)_x = 0$$

-

$$\begin{aligned} \rho_j^{n+1} &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_j^n \rho_j^n - U_{j-1}^n \rho_{j-1}^n\right), \quad U_j^n > 0, \\ \rho_j^{n+1} &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_{j+1}^n \rho_{j+1}^n - U_j^n \rho_j^n\right), \quad U_j^n < 0 \end{aligned}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Metoda typu upwind (upstream) (R. Richtmyer, K. Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience, New York, 1957).
- Metodu naznačíme na příkladu zákona zachování hmotnosti

$$\varrho_t + (u\varrho)_x = 0$$

-

$$\begin{aligned} \rho_j^{n+1} &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_j^n \rho_j^n - U_{j-1}^n \rho_{j-1}^n\right), \quad U_j^n > 0, \\ \rho_j^{n+1} &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_{j+1}^n \rho_{j+1}^n - U_j^n \rho_j^n\right), \quad U_j^n < 0 \end{aligned}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Metoda typu upwind (upstream) (R. Richtmyer, K. Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience, New York, 1957).
- Metodu naznačíme na příkladu zákona zachování hmotnosti

$$\varrho_t + (u\varrho)_x = 0$$

- $$\begin{aligned} \rho_j^{n+1} &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_j^n \rho_j^n - U_{j-1}^n \rho_{j-1}^n\right), \quad U_j^n > 0, \\ \rho_j^{n+1} &= \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_{j+1}^n \rho_{j+1}^n - U_j^n \rho_j^n\right), \quad U_j^n < 0 \end{aligned}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Laxova-Friedrichsova metoda (P. D. Lax: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics 7 (1954), pp. 159-193.

$$q_t + [f(q)]_x = 0$$

- Lax si uvědomil význam formulace v tokovém (konzervativním) tvaru (diskrétní analogie globálního – integrálního tvaru). Bilanční tvar metody konečných diferencí:

$$Q_{j+1}^n = \frac{1}{2}\left(Q_j^n + Q_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f(Q_{j+1}^n) - f(Q_{j-1}^n)\right]$$

$$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right) \\ F_{j+1/2}^n &= \tfrac{1}{2}\left[f(Q_j^n) + f(Q_{j+1}^n)\right] - \tfrac{\Delta x}{2\Delta t}(Q_{j+1}^n - Q_j^n) \end{aligned}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Laxova-Friedrichsova metoda (P. D. Lax: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics 7 (1954), pp. 159-193.

$$q_t + [f(q)]_x = 0$$

- Lax si uvědomil význam formulace v tokovém (konzervativním) tvaru (diskrétní analogie globálního – integrálního tvaru). Bilanční tvar metody konečných diferencí:

$$Q_{j+1}^n = \frac{1}{2}\left(Q_j^n + Q_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f(Q_{j+1}^n) - f(Q_{j-1}^n)\right]$$

$$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right) \\ F_{j+1/2}^n &= \tfrac{1}{2}\left[f(Q_j^n) + f(Q_{j+1}^n)\right] - \tfrac{\Delta x}{2\Delta t}(Q_{j+1}^n - Q_j^n) \end{aligned}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Laxova-Friedrichsova metoda (P. D. Lax: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics 7 (1954), pp. 159-193.

$$q_t + [f(q)]_x = 0$$

- Lax si uvědomil význam formulace v tokovém (konzervativním) tvaru (diskrétní analogie globálního – integrálního tvaru). Bilanční tvar metody konečných diferencí:

$$Q^n_{j+1} = \frac{1}{2}\left(Q^n_j + Q^n_{j+1}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f(Q^n_{j+1}) - f(Q^n_{j-1})\right]$$

$$\begin{aligned} Q^{n+1}_j &= Q^n_j - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^n_{j+1/2} - F^n_{j-1/2}\right) \\ F^n_{j+1/2} &= \tfrac{1}{2}\left[f(Q^n_j) + f(Q^n_{j+1})\right] - \tfrac{\Delta x}{2\Delta t}(Q^n_{j+1} - Q^n_j) \end{aligned}$$

Metoda konečných diferencí – přehled

- Laxova-Friedrichsova metoda (P. D. Lax: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics 7 (1954), pp. 159-193.

$$q_t + [f(q)]_x = 0$$

- Lax si uvědomil význam formulace v tokovém (konzervativním) tvaru (diskrétní analogie globálního – integrálního tvaru). Bilanční tvar metody konečných diferencí:

$$Q_{j+1}^n = \frac{1}{2}\left(Q_j^n + Q_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f(Q_{j+1}^n) - f(Q_{j-1}^n)\right]$$

$$\begin{aligned} Q_j^{n+1} &= Q_j^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right) \\ F_{j+1/2}^n &= \tfrac{1}{2}\left[f(Q_j^n) + f(Q_{j+1}^n)\right] - \tfrac{\Delta x}{2\Delta t}(Q_{j+1}^n - Q_j^n) \end{aligned}$$

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Aproximace prvního řádu „rozmazávají řešení“, aproximace vyššího řádu generují oscilace.
- J. von Neumann, R. Richtmyer: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, Journal of Applied Physics, 21 (1950), 232-237
- Diferenciální model zákona má smysl pouze za předpokladu, že stavové a tokové funkce jsou diferencovatelné. V bodech, ve kterých není řešení hladké, platí např. Rankineovy-Hugoniotovy vztahy.
- Změna přístupu: Řešení se v některých bodech prudce mění, je ale hladké – metody typu shock-capturing.
- Současně lze výše uvedené diferenciální vztahy považovat za modely zákonů zachování pro nevazké tekutiny. Přidáme vazkost – formulace více odpovídá realitě.

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Aproximace prvního řádu „rozmazávají řešení“, aproximace vyššího řádu generují oscilace.
- J. von Neumann, R. Richtmyer: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, Journal of Applied Physics, 21 (1950), 232-237
- Diferenciální model zákona má smysl pouze za předpokladu, že stavové a tokové funkce jsou diferencovatelné. V bodech, ve kterých není řešení hladké, platí např. Rankineovy-Hugoniotovy vztahy.
- Změna přístupu: Řešení se v některých bodech prudce mění, je ale hladké – metody typu shock-capturing.
- Současně lze výše uvedené diferenciální vztahy považovat za modely zákonů zachování pro nevazké tekutiny. Přidáme vazkost – formulace více odpovídá realitě.

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Aproximace prvního řádu „rozmazávají řešení“, aproximace vyššího řádu generují oscilace.
- J. von Neumann, R. Richtmyer: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, Journal of Applied Physics, 21 (1950), 232-237
- Diferenciální model zákona má smysl pouze za předpokladu, že stavové a tokové funkce jsou diferencovatelné. V bodech, ve kterých není řešení hladké, platí např. Rankineovy-Hugoniotovy vztahy.
- Změna přístupu: Řešení se v některých bodech prudce mění, je ale hladké – metody typu shock-capturing.
- Současně lze výše uvedené diferenciální vztahy považovat za modely zákonů zachování pro nevazké tekutiny. Přidáme vazkost – formulace více odpovídá realitě.

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Aproximace prvního řádu „rozmazávají řešení“, aproximace vyššího řádu generují oscilace.
- J. von Neumann, R. Richtmyer: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, Journal of Applied Physics, 21 (1950), 232-237
- Diferenciální model zákona má smysl pouze za předpokladu, že stavové a tokové funkce jsou diferencovatelné. V bodech, ve kterých není řešení hladké, platí např. Rankineovy-Hugoniotovy vztahy.
- Změna přístupu: Řešení se v některých bodech prudce mění, je ale hladké – metody typu shock-capturing.
- Současně lze výše uvedené diferenciální vztahy považovat za modely zákonů zachování pro nevazké tekutiny. Přidáme vazkost – formulace více odpovídá realitě.

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Aproximace prvního řádu „rozmazávají řešení“, aproximace vyššího řádu generují oscilace.
- J. von Neumann, R. Richtmyer: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, Journal of Applied Physics, 21 (1950), 232-237
- Diferenciální model zákona má smysl pouze za předpokladu, že stavové a tokové funkce jsou diferencovatelné. V bodech, ve kterých není řešení hladké, platí např. Rankineovy-Hugoniotovy vztahy.
- Změna přístupu: Řešení se v některých bodech prudce mění, je ale hladké – metody typu shock-capturing.
- Současně lze výše uvedené diferenciální vztahy považovat za modely zákonů zachování pro nevazké tekutiny. Přidáme vazkost – formulace více odpovídá realitě.

Metoda umělé vazkosti – 1950

Uvažujme semidiskrétní aproximaci

$$\frac{dQ_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}\left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right), \quad F_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(Q_j) + f(Q_{j+1})\right]$$

$$\frac{dQ_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}\left[f(Q_{j+1}) - f(Q_{j-1})\right]$$

Získaná metoda je nestabilní (i v lineárním pojetí).

Metoda umělé vazkosti – 1950

Uvažujme semidiskrétní aproximaci

$$\frac{dQ_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}\left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right), \quad F_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(Q_j) + f(Q_{j+1})\right]$$

$$\frac{dQ_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}\left[f(Q_{j+1}) - f(Q_{j-1})\right]$$

Získaná metoda je nestabilní (i v lineárním pojetí).

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = dq_{xx}$; délka časového kroku omezena stejně přísně jako v případě rovnic parabolického typu.
- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = \frac{a\Delta x}{2} q_{xx}$; délka časového kroku omezena CFL podmínkou $a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$; metoda je však pouze prvního řádu.
- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = \frac{a\Delta x^2}{2} q_{xx}$; metoda je opět nestabilní.
- Řešení: navrhnout umělou vazkost tak, aby byla funkcí dat. V bodech, kde je řešení hladké, přidáváme málo vazkosti, v bodech, kde se řešení prudce mění, přidáváme vazkosti více. Pro lineární problém používáme nelineární metodu.

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = dq_{xx}$; délka časového kroku omezena stejně přísně jako v případě rovnic parabolického typu.
- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = \frac{a\Delta x}{2} q_{xx}$; délka časového kroku omezena CFL podmínkou $a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$; metoda je však pouze prvního řádu.
- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = \frac{a\Delta x^2}{2} q_{xx}$; metoda je opět nestabilní.
- Řešení: navrhnout umělou vazkost tak, aby byla funkcí dat. V bodech, kde je řešení hladké, přidáváme málo vazkosti, v bodech, kde se řešení prudce mění, přidáváme vazkosti více. Pro lineární problém používáme nelineární metodu.

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = dq_{xx}$; délka časového kroku omezena stejně přísně jako v případě rovnic parabolického typu.
- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = \frac{a\Delta x}{2} q_{xx}$; délka časového kroku omezena CFL podmínkou $a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$; metoda je však pouze prvního řádu.
- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = \frac{a\Delta x^2}{2} q_{xx}$; metoda je opět nestabilní.
- Řešení: navrhnout umělou vazkost tak, aby byla funkcí dat. V bodech, kde je řešení hladké, přidáváme málo vazkosti, v bodech, kde se řešení prudce mění, přidáváme vazkosti více. Pro lineární problém používáme nelineární metodu.

Metoda umělé vazkosti – 1950

- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = dq_{xx}$; délka časového kroku omezena stejně přísně jako v případě rovnic parabolického typu.
- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = \frac{a\Delta x}{2} q_{xx}$; délka časového kroku omezena CFL podmínkou $a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$; metoda je však pouze prvního řádu.
- Modifikace nevazkého modelu na $q_t + aq_x = \frac{a\Delta x^2}{2} q_{xx}$; metoda je opět nestabilní.
- Řešení: navrhnout umělou vazkost tak, aby byla funkcí dat. V bodech, kde je řešení hladké, přidáváme málo vazkosti, v bodech, kde se řešení prudce mění, přidáváme vazkosti více. Pro lineární problém používáme nelineární metodu.

Hybridní metody – 1972

- A. Harten and G. Zwas: Self-adjusting hybrid schemes for shock computations, Journal of Computational Physics 9 (1972), p. 568.
- Kříženec metody prvního a vyššího řádu. Metoda je v tokovém (konzervativním, divergentním) tvaru

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta t}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right)$$

- Numerický tok $F_{j+1/2}^n$ je kombinací toků metod prvního a druhého řádu
- $F_{j+1/2}^n = \Theta_{j+1/2}^n F_{j+1/2}^{1,n} + (1 - \Theta_{j+1/2}^n) F_{j+1/2}^{k,n}$
- $\Theta_{j+1/2}^n = \max\left(\Theta_j^n, \Theta_{j+1}^n\right)$, $\Theta_j^n = \left|\frac{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| - |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| + |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}\right|$

Hybridní metody – 1972

- A. Harten and G. Zwas: Self-adjusting hybrid schemes for shock computations, Journal of Computational Physics 9 (1972), p. 568.
- Kříženec metody prvního a vyššího řádu. Metoda je v tokovém (konzervativním, divergentním) tvaru

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta t}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right)$$

- Numerický tok $F_{j+1/2}^n$ je kombinací toků metod prvního a druhého řádu
- $F_{j+1/2}^n = \Theta_{j+1/2}^n F_{j+1/2}^{1,n} + (1-\Theta_{j+1/2}^n) F_{j+1/2}^{k,n}$
- $\Theta_{j+1/2}^n = \max\left(\Theta_j^n, \Theta_{j+1}^n\right)$, $\Theta_j^n = \left|\frac{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| - |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| + |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}\right|$

Hybridní metody – 1972

- A. Harten and G. Zwas: Self-adjusting hybrid schemes for shock computations, Journal of Computational Physics 9 (1972), p. 568.
- Kříženec metody prvního a vyššího řádu. Metoda je v tokovém (konzervativním, divergentním) tvaru

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta t}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right)$$

- Numerický tok $F_{j+1/2}^n$ je kombinací toků metod prvního a druhého řádu
- $F_{j+1/2}^n = \Theta_{j+1/2}^n F_{j+1/2}^{1,n} + (1-\Theta_{j+1/2}^n) F_{j+1/2}^{k,n}$
- $\Theta_{j+1/2}^n = \max\left(\Theta_j^n, \Theta_{j+1}^n\right)$, $\Theta_j^n = \left|\frac{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| - |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| + |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}\right|$

Hybridní metody – 1972

- A. Harten and G. Zwas: Self-adjusting hybrid schemes for shock computations, Journal of Computational Physics 9 (1972), p. 568.
- Kříženec metody prvního a vyššího řádu. Metoda je v tokovém (konzervativním, divergentním) tvaru

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta t}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right)$$

- Numerický tok $F_{j+1/2}^n$ je kombinací toků metod prvního a druhého řádu
- $F_{j+1/2}^n = \Theta_{j+1/2}^n F_{j+1/2}^{1,n} + (1 - \Theta_{j+1/2}^n) F_{j+1/2}^{k,n}$
- $\Theta_{j+1/2}^n = \max\left(\Theta_j^n, \Theta_{j+1}^n\right)$, $\Theta_j^n = \left|\frac{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| - |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| + |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}\right|$

Hybridní metody – 1972

- A. Harten and G. Zwas: Self-adjusting hybrid schemes for shock computations, Journal of Computational Physics 9 (1972), p. 568.
- Kříženec metody prvního a vyššího řádu. Metoda je v tokovém (konzervativním, divergentním) tvaru

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta t}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right)$$

- Numerický tok $F_{j+1/2}^n$ je kombinací toků metod prvního a druhého řádu
- $F_{j+1/2}^n = \Theta_{j+1/2}^n F_{j+1/2}^{1,n} + (1 - \Theta_{j+1/2}^n) F_{j+1/2}^{k,n}$
- $\Theta_{j+1/2}^n = \max\left(\Theta_j^n, \Theta_{j+1}^n\right)$, $\Theta_j^n = \left|\frac{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| - |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}{|\Delta\rho_{j+1/2}^n| + |\Delta\rho_{j-1/2}^n|}\right|$

Laxova-Wendroffova věta

- P. D. Lax, B. Wendroff: Systems of Conservation Laws. Communications on Pure and Applied Mathematics 13 (1960), pp. 217-237.
- Je již zavedena konzistence numerické a přesné tokové funkce, tj. $F^n_{j+1/2}$ a $f(q)$. Pracuje se se slabým řešením a Rankineovým-Hugoniotovým vztahem. Laxova-Wendroffova věta: konverguje-li posloupnost přibližných řešení, pak konverguje ke slabému řešení.

Přístupy typu fluid transport

- Lokální (diferenciální) formulaci není vhodné použít pro nehladké funkce. Vyjdeme tedy z globální (integrální) bilance:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_{n+1})\,dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_n)\,dx - \\ - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j+1/2},t))\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j-1/2},t))\,dt$$

-

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_{n+1})\,dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_n)\,dx - \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j+1/2},t))\,dt - \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j-1/2},t))\,dt\right]$$

Přístupy typu fluid transport

- Lokální (diferenciální) formulaci není vhodné použít pro nehladké funkce. Vyjdeme tedy z globální (integrální) bilance:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_{n+1})\,dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_n)\,dx - \\ - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j+1/2},t))\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j-1/2},t))\,dt$$

-

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_{n+1})\,dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_n)\,dx - \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j+1/2},t))\,dt - \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j-1/2},t))\,dt\right]$$

Přístupy typu fluid transport

- Lokální (diferenciální) formulaci není vhodné použít pro nehladké funkce. Vyjdeme tedy z globální (integrální) bilance:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_{n+1})\,dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_n)\,dx - \\ - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j+1/2},t))\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j-1/2},t))\,dt$$

-

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_{n+1})\,dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x,t_n)\,dx - \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j+1/2},t))\,dt - \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{j-1/2},t))\,dt\right]$$

Přístupy typu fluid transport

$$\bar{q}_j^{n+1} = \bar{q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n\right]$$

$$\bar{Q}_j^{n+1} = \bar{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{F}_{j+1/2}^n - \bar{F}_{j-1/2}^n\right]$$

Přístupy typu fluid transport

$$\bar{q}_j^{n+1} = \bar{q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{f}^n_{j+1/2} - \bar{f}^n_{j-1/2}\right]$$

$$\bar{Q}_j^{n+1} = \bar{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\bar{F}^n_{j+1/2} - \bar{F}^n_{j-1/2}\right]$$

Přístupy typu fluid transport

- Oblast je rozdělena na konečný počet bilančních sektorů.
- V každém bilančním sektoru je v daném čase určité množství tekutiny (nějakým způsobem rozložené).
- Tato tekutina je vlivem rychlostního pole transportována mezi buňkami (metoda typu upwind lze intepretovat jako metodu typu donor cell). Numericky modelujeme zákon zachování.
- J. P. Boris, D. L. Book: Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works, Journal of Computational Physics 11 (1973), 38-69. Difúzní (advekce má příliš velkou numerickou vazkost) a antidifúzní fáze (která nezpůsobí numerické oscilace).
- P. D. Lax: Nonlinear Partial Differential Equations and Computing, SIAM Review 11 (1969) 7-19. Konečně-objemové pojetí, formulace s numerickou tokovou funkcí, upwinding, metoda dává lepší výsledky pro nelineární případ, Eulerovy rovnice 2/3-nelineární.

Přístupy typu fluid transport

- Oblast je rozdělena na konečný počet bilančních sektorů.
- V každém bilančním sektoru je v daném čase určité množství tekutiny (nějakým způsobem rozložené).
- Tato tekutina je vlivem rychlostního pole transportována mezi buňkami (metoda typu upwind lze intepretovat jako metodu typu donor cell). Numericky modelujeme zákon zachování.
- J. P. Boris, D. L. Book: Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works, Journal of Computational Physics 11 (1973), 38-69. Difúzní (advekce má příliš velkou numerickou vazkost) a antidifúzní fáze (která nezpůsobí numerické oscilace).
- P. D. Lax: Nonlinear Partial Differential Equations and Computing, SIAM Review 11 (1969) 7-19. Konečně-objemové pojetí, formulace s numerickou tokovou funkcí, upwinding, metoda dává lepší výsledky pro nelineární případ, Eulerovy rovnice 2/3-nelineární.

Přístupy typu fluid transport

- Oblast je rozdělena na konečný počet bilančních sektorů.
- V každém bilančním sektoru je v daném čase určité množství tekutiny (nějakým způsobem rozložené).
- Tato tekutina je vlivem rychlostního pole transportována mezi buňkami (metoda typu upwind lze intepretovat jako metodu typu donor cell). Numericky modelujeme zákon zachování.
- J. P. Boris, D. L. Book: Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works, Journal of Computational Physics 11 (1973), 38-69. Difúzní (advekce má příliš velkou numerickou vazkost) a antidifúzní fáze (která nezpůsobí numerické oscilace).
- P. D. Lax: Nonlinear Partial Differential Equations and Computing, SIAM Review 11 (1969) 7-19. Konečně-objemové pojetí, formulace s numerickou tokovou funkcí, upwinding, metoda dává lepší výsledky pro nelineární případ, Eulerovy rovnice 2/3-nelineární.

Přístupy typu fluid transport

- Oblast je rozdělena na konečný počet bilančních sektorů.
- V každém bilančním sektoru je v daném čase určité množství tekutiny (nějakým způsobem rozložené).
- Tato tekutina je vlivem rychlostního pole transportována mezi buňkami (metoda typu upwind lze intepretovat jako metodu typu donor cell). Numericky modelujeme zákon zachování.
- J. P. Boris, D. L. Book: Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works, Journal of Computational Physics 11 (1973), 38-69. Difúzní (advekce má příliš velkou numerickou vazkost) a antidifúzní fáze (která nezpůsobí numerické oscilace).
- P. D. Lax: Nonlinear Partial Differential Equations and Computing, SIAM Review 11 (1969) 7-19. Konečně-objemové pojetí, formulace s numerickou tokovou funkcí, upwinding, metoda dává lepší výsledky pro nelineární případ, Eulerovy rovnice 2/3-nelineární.

Přístupy typu fluid transport

- Oblast je rozdělena na konečný počet bilančních sektorů.
- V každém bilančním sektoru je v daném čase určité množství tekutiny (nějakým způsobem rozložené).
- Tato tekutina je vlivem rychlostního pole transportována mezi buňkami (metoda typu upwind lze intepretovat jako metodu typu donor cell). Numericky modelujeme zákon zachování.
- J. P. Boris, D. L. Book: Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works, Journal of Computational Physics 11 (1973), 38-69. Difúzní (advekce má příliš velkou numerickou vazkost) a antidifúzní fáze (která nezpůsobí numerické oscilace).
- P. D. Lax: Nonlinear Partial Differential Equations and Computing, SIAM Review 11 (1969) 7-19. Konečně-objemové pojetí, formulace s numerickou tokovou funkcí, upwinding, metoda dává lepší výsledky pro nelineární případ, Eulerovy rovnice 2/3-nelineární.

Přístupy typu fluid transport – více prostorových dimenzí

- $$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x + [\mathbf{g}(\mathbf{q})]_y = \mathbf{0}$$

- S. T. Zalesak: Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids, Journal of Computational Physics 31 (1979), 335-362.

- $$\mathbf{Q}_{ij}^{n+1} = \mathbf{Q}_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}[\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n}] - \frac{\Delta t}{\Delta y}[\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n}]$$

Přístupy typu fluid transport – více prostorových dimenzí

- $$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x + [\mathbf{g}(\mathbf{q})]_y = \mathbf{0}$$
- S. T. Zalesak: Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids, Journal of Computational Physics 31 (1979), 335-362.
- $$\mathbf{Q}_{ij}^{n+1} = \mathbf{Q}_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}[\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n}] - \frac{\Delta t}{\Delta y}[\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n}]$$

Přístupy typu fluid transport – více prostorových dimenzí

- $$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x + [\mathbf{g}(\mathbf{q})]_y = \mathbf{0}$$
- S. T. Zalesak: Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids, Journal of Computational Physics 31 (1979), 335-362.
- $$\mathbf{Q}_{ij}^{n+1} = \mathbf{Q}_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}[\mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^{n}] - \frac{\Delta t}{\Delta y}[\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n}]$$

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- V roce 1953 začal S. K. Godunov pracovat v (pozdějším Keldyšově) Ústavu aplikované matematiky na metodách pro CFD. Původně chtěl použít von Neumannovu a Richtmyerovu metodu umělé vazkosti.
- Z časových důvodů začal pracovat na variantě, kterou rozpracoval A. I. Žukov. Žukovova metoda byla shodná s Laxovým přístupem (Žukov však neznal Laxovy práce). Žukov nepoužíval umělou vazkost. Používal diferenční metody a zjistil, že případné rozmazání rázových vln je způsobeno numerickou vazkostí diskrétní aproximace [první diferenciální aproximace (modifikovaná rovnice) obsahuje člen s vazkostí].

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- V roce 1953 začal S. K. Godunov pracovat v (pozdějším Keldyšově) Ústavu aplikované matematiky na metodách pro CFD. Původně chtěl použít von Neumannovu a Richtmyerovu metodu umělé vazkosti.
- Z časových důvodů začal pracovat na variantě, kterou rozpracoval A. I. Žukov. Žukovova metoda byla shodná s Laxovým přístupem (Žukov však neznal Laxovy práce). Žukov nepoužíval umělou vazkost. Používal diferenční metody a zjistil, že případné rozmazání rázových vln je způsobeno numerickou vazkostí diskrétní aproximace [první diferenciální aproximace (modifikovaná rovnice) obsahuje člen s vazkostí].

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- Pokud použil Žukov metody vyššího řádu, dostal přibližné řešení, které oscilovalo. Proto od použití metod vyššího řádu opustil.
- Dále Žukov formuloval (chybně) postačující a nutnou podmínku stability: první diferenciální aproximace metody je konzervativní právě tehdy, když metoda je stabilní.
- Godunov si této chyby v první fázi nepovšiml. Vyvíjel metody druhého řádu,jejichž první diferenciální aproximace jsou konzervativní.
- Aproximace rázových vln se však šířily nesprávnou rychlostí. Godunov pověřil jednoho svého spolupracovníka, aby realizoval simulace s různými hodnotami prostorového a časového kroku. Tato odchylka se však nezmenšovala.

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- Pokud použil Žukov metody vyššího řádu, dostal přibližné řešení, které oscilovalo. Proto od použití metod vyššího řádu opustil.
- Dále Žukov formuloval (chybně) postačující a nutnou podmínku stability: první diferenciální aproximace metody je konzervativní právě tehdy, když metoda je stabilní.
- Godunov si této chyby v první fázi nepovšiml. Vyvíjel metody druhého řádu,jejichž první diferenciální aproximace jsou konzervativní.
- Aproximace rázových vln se však šířily nesprávnou rychlostí. Godunov pověřil jednoho svého spolupracovníka, aby realizoval simulace s různými hodnotami prostorového a časového kroku. Tato odchylka se však nezmenšovala.

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- Pokud použil Žukov metody vyššího řádu, dostal přibližné řešení, které oscilovalo. Proto od použití metod vyššího řádu opustil.
- Dále Žukov formuloval (chybně) postačující a nutnou podmínku stability: první diferenciální aproximace metody je konzervativní právě tehdy, když metoda je stabilní.
- Godunov si této chyby v první fázi nepovšiml. Vyvíjel metody druhého řádu,jejichž první diferenciální aproximace jsou konzervativní.
- Aproximace rázových vln se však šířily nesprávnou rychlostí. Godunov pověřil jednoho svého spolupracovníka, aby realizoval simulace s různými hodnotami prostorového a časového kroku. Tato odchylka se však nezmenšovala.

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- Pokud použil Žukov metody vyššího řádu, dostal přibližné řešení, které oscilovalo. Proto od použití metod vyššího řádu opustil.
- Dále Žukov formuloval (chybně) postačující a nutnou podmínku stability: první diferenciální aproximace metody je konzervativní právě tehdy, když metoda je stabilní.
- Godunov si této chyby v první fázi nepovšiml. Vyvíjel metody druhého řádu,jejichž první diferenciální aproximace jsou konzervativní.
- Aproximace rázových vln se však šířily nesprávnou rychlostí. Godunov pověřil jednoho svého spolupracovníka, aby realizoval simulace s různými hodnotami prostorového a časového kroku. Tato odchylka se však nezmenšovala.

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- Godunov změnil taktiku: použil metody v tokovém tvaru (kladl požadavek přímo na aproximaci, nikoliv na první diferenciální aproximaci); dále vyvíjel pouze takové metody, které zajistily přesnou rychlost šíření rázových vln (pro jakoukoliv volbu diskretizačních parametrů).
- Současně vyšla kniha L. D. Landaua a E. M. Lifschitze Mechanika kontinua. V této knize bylo popsáno řešení Riemannova problému (problém najít zobecněné řešení úlohy se speciální počáteční podmínkou). Godunov doplnil svou metodu o korektní aproximaci vln zředění.
- Metoda byla popsána v Godunovově disertaci. Nastal problém s publikací (pro některá periodika příliš monoho matematiky, pro jiná příliš mechaniky).
- Godunov: Kdybych znal Laxův článek, nebyl bych ovlivněn Žukovovou zprávou (s chybami) a nikdy bych metodu nezkonstruoval.

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- Godunov změnil taktiku: použil metody v tokovém tvaru (kladl požadavek přímo na aproximaci, nikoliv na první diferenciální aproximaci); dále vyvíjel pouze takové metody, které zajistily přesnou rychlost šíření rázových vln (pro jakoukoliv volbu diskretizačních parametrů).
- Současně vyšla kniha L. D. Landaua a E. M. Lifschitze Mechanika kontinua. V této knize bylo popsáno řešení Riemannova problému (problém najít zobecněné řešení úlohy se speciální počáteční podmínkou). Godunov doplnil svou metodu o korektní aproximaci vln zředění.
- Metoda byla popsána v Godunovově disertaci. Nastal problém s publikací (pro některá periodika příliš monoho matematiky, pro jiná příliš mechaniky).
- Godunov: Kdybych znal Laxův článek, nebyl bych ovlivněn Žukovovou zprávou (s chybami) a nikdy bych metodu nezkonstruoval.

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- Godunov změnil taktiku: použil metody v tokovém tvaru (kladl požadavek přímo na aproximaci, nikoliv na první diferenciální aproximaci); dále vyvíjel pouze takové metody, které zajistily přesnou rychlost šíření rázových vln (pro jakoukoliv volbu diskretizačních parametrů).
- Současně vyšla kniha L. D. Landaua a E. M. Lifschitze Mechanika kontinua. V této knize bylo popsáno řešení Riemannova problému (problém najít zobecněné řešení úlohy se speciální počáteční podmínkou). Godunov doplnil svou metodu o korektní aproximaci vln zředění.
- Metoda byla popsána v Godunovově disertaci. Nastal problém s publikací (pro některá periodika příliš monoho matematiky, pro jiná příliš mechaniky).
- Godunov: Kdybych znal Laxův článek, nebyl bych ovlivněn Žukovovou zprávou (s chybami) a nikdy bych metodu nezkonstruoval.

Co se dělo na Východě – Godunovova metoda

- Godunov změnil taktiku: použil metody v tokovém tvaru (kladl požadavek přímo na aproximaci, nikoliv na první diferenciální aproximaci); dále vyvíjel pouze takové metody, které zajistily přesnou rychlost šíření rázových vln (pro jakoukoliv volbu diskretizačních parametrů).
- Současně vyšla kniha L. D. Landaua a E. M. Lifschitze Mechanika kontinua. V této knize bylo popsáno řešení Riemannova problému (problém najít zobecněné řešení úlohy se speciální počáteční podmínkou). Godunov doplnil svou metodu o korektní aproximaci vln zředění.
- Metoda byla popsána v Godunovově disertaci. Nastal problém s publikací (pro některá periodika příliš monoho matematiky, pro jiná příliš mechaniky).
- Godunov: Kdybych znal Laxův článek, nebyl bych ovlivněn Žukovovou zprávou (s chybami) a nikdy bych metodu nezkonstruoval.

Co se dělo na Východě – RSA formulace Godunovovy metody

- **Reconstruct.** Aproximace integrálních průměrů hledané funkce na časové vrstvě t_n je použita k rekonstrukci přibližného řešení ve tvaru po částech konstantní funkce.
- **Solve.** Jsou vyřešeny příslušné Riemannovy problémy.
- **Average.** Řešení Riemannových problémů jsou využita pro výpočet aproximací integrálních průměrů na časové vrstvě t_{n+1}.

Každý časový krok metody obsahuje sadu přesných řešení Riemannových problémů.

Co se dělo na Východě – RSA formulace Godunovovy metody

- **Reconstruct.** Aproximace integrálních průměrů hledané funkce na časové vrstvě t_n je použita k rekonstrukci přibližného řešení ve tvaru po částech konstantní funkce.
- **Solve.** Jsou vyřešeny příslušné Riemannovy problémy.
- **Average.** Řešení Riemannových problémů jsou využita pro výpočet aproximací integrálních průměrů na časové vrstvě t_{n+1}.

Každý časový krok metody obsahuje sadu přesných řešení Riemannových problémů.

Co se dělo na Východě – RSA formulace Godunovovy metody

- **Reconstruct.** Aproximace integrálních průměrů hledané funkce na časové vrstvě t_n je použita k rekonstrukci přibližného řešení ve tvaru po částech konstantní funkce.
- **Solve.** Jsou vyřešeny příslušné Riemannovy problémy.
- **Average.** Řešení Riemannových problémů jsou využita pro výpočet aproximací integrálních průměrů na časové vrstvě t_{n+1}.

Každý časový krok metody obsahuje sadu přesných řešení Riemannových problémů.

Co se dělo na Východě – RSA formulace Godunovovy metody

- **Reconstruct.** Aproximace integrálních průměrů hledané funkce na časové vrstvě t_n je použita k rekonstrukci přibližného řešení ve tvaru po částech konstantní funkce.
- **Solve.** Jsou vyřešeny příslušné Riemannovy problémy.
- **Average.** Řešení Riemannových problémů jsou využita pro výpočet aproximací integrálních průměrů na časové vrstvě t_{n+1}.

Každý časový krok metody obsahuje sadu přesných řešení Riemannových problémů.

Co se dělo na Východě – Rusanovova metoda

- Rusanovova metoda (V. V. Rusanov: Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles. Journal of Computational Mathematics and Physics USSR 1 (1961), 267–279).
- Metodu naznačíme na příkladu Eulerových rovnic

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x = 0$$

-

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_j^{n+1} &= \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j-1}^n)\right] + \\
&+ \frac{1}{4}\Big[(\alpha_{j+1}^n + \alpha_j^n)(\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n) - \\
&- (\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n)(\mathbf{Q}_j^n - \mathbf{Q}_{j-1}^n)\Big], \\
\alpha_j^n &= \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_j^n + c_j^n\right), \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}}
\end{aligned}$$

Co se dělo na Východě – Rusanovova metoda

- Rusanovova metoda (V. V. Rusanov: Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles. Journal of Computational Mathematics and Physics USSR 1 (1961), 267–279).
- Metodu naznačíme na příkladu Eulerových rovnic

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x = 0$$

-

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_j^{n+1} &= \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j-1}^n)\right] + \\ &+ \frac{1}{4}\Big[(\alpha_{j+1}^n + \alpha_j^n)(\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n) - \\ &- (\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n)(\mathbf{Q}_j^n - \mathbf{Q}_{j-1}^n)\Big], \\ \alpha_j^n &= \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_j^n + c_j^n\right), \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}} \end{aligned}$$

Co se dělo na Východě – Rusanovova metoda

- Rusanovova metoda (V. V. Rusanov: Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles. Journal of Computational Mathematics and Physics USSR 1 (1961), 267–279).
- Metodu naznačíme na příkladu Eulerových rovnic

$$\mathbf{q}_t + [\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x = 0$$

-

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_j^{n+1} &= \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{j-1}^n)\right] + \\
&+ \frac{1}{4}\Big[(\alpha_{j+1}^n + \alpha_j^n)(\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n) - \\
&- (\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n)(\mathbf{Q}_j^n - \mathbf{Q}_{j-1}^n)\Big], \\
\alpha_j^n &= \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_j^n + c_j^n\right), \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}}
\end{aligned}$$

Zpět na Západ

- A. Harten, J. M Hyman and P. D. Lax: On Finite-Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks, IMM 411 COO-3077-106, Courant Institute of Mathematical Sciences (1976).
- Pracuje se se slabým řešením, Rankineovým-Hugoniotovým vztahem, ale také s limitním vazkým řešením a podmínkami entropie.
- Dále je zavedena definice monotónní metody. Je ukázáno, že monotónní metody konvergují k entropickému (tj. fyzikálně relevantnímu) řešení. Současně je ukázáno, že jde o metody formálně prvního řádu.
- Je testována nemonotónní metoda (Laxova-Wendroffova): konverguje ke slabému řešení, které není entropické.

Zpět na Západ

- A. Harten, J. M Hyman and P. D. Lax: On Finite-Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks, IMM 411 COO-3077-106, Courant Institute of Mathematical Sciences (1976).
- Pracuje se se slabým řešením, Rankineovým-Hugoniotovým vztahem, ale také s limitním vazkým řešením a podmínkami entropie.
- Dále je zavedena definice monotónní metody. Je ukázáno, že monotónní metody konvergují k entropickému (tj. fyzikálně relevantnímu) řešení. Současně je ukázáno, že jde o metody formálně prvního řádu.
- Je testována nemonotónní metoda (Laxova-Wendroffova): konverguje ke slabému řešení, které není entropické.

Zpět na Západ

- A. Harten, J. M Hyman and P. D. Lax: On Finite-Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks, IMM 411 COO-3077-106, Courant Institute of Mathematical Sciences (1976).
- Pracuje se se slabým řešením, Rankineovým-Hugoniotovým vztahem, ale také s limitním vazkým řešením a podmínkami entropie.
- Dále je zavedena definice monotónní metody. Je ukázáno, že monotónní metody konvergují k entropickému (tj. fyzikálně relevantnímu) řešení. Současně je ukázáno, že jde o metody formálně prvního řádu.
- Je testována nemonotónní metoda (Laxova-Wendroffova): konverguje ke slabému řešení, které není entropické.

Zpět na Západ

- A. Harten, J. M Hyman and P. D. Lax: On Finite-Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks, IMM 411 COO-3077-106, Courant Institute of Mathematical Sciences (1976).
- Pracuje se se slabým řešením, Rankineovým-Hugoniotovým vztahem, ale také s limitním vazkým řešením a podmínkami entropie.
- Dále je zavedena definice monotónní metody. Je ukázáno, že monotónní metody konvergují k entropickému (tj. fyzikálně relevantnímu) řešení. Současně je ukázáno, že jde o metody formálně prvního řádu.
- Je testována nemonotónní metoda (Laxova-Wendroffova): konverguje ke slabému řešení, které není entropické.

Název metoda konečných objemů – 1977

- A. Jameson: Numerical Calculation of Transonic Flow past a Swept Wing by a Finite Volume Method, Third IFIP Conference on Computing Methods in Applied Science and Engineering, 1977 Versailles.
- Popsán princip metody a uveden její dnešní obvyklý název.

Název metoda konečných objemů – 1977

- A. Jameson: Numerical Calculation of Transonic Flow past a Swept Wing by a Finite Volume Method, Third IFIP Conference on Computing Methods in Applied Science and Engineering, 1977 Versailles.
- Popsán princip metody a uveden její dnešní obvyklý název.

Metody Godunovova typu vyšších řádů (ve více prostorových dimenzích) – 1979

- B. van Leer: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, Journal of Computational Physics 32 (1979), pp. 101-136.
- P. Colella, P. R. Woodward: The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations, Journal of Computational Physics 54 (1984), pp. 174-201.
- P. Colella: Multidimensional Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 87 (1990), pp. 171-200.

Metody Godunovova typu vyšších řádů (ve více prostorových dimenzích) – 1979

- B. van Leer: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, Journal of Computational Physics 32 (1979), pp. 101-136.
- P. Colella, P. R. Woodward: The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations, Journal of Computational Physics 54 (1984), pp. 174-201.
- P. Colella: Multidimensional Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 87 (1990), pp. 171-200.

Metody Godunovova typu vyšších řádů (ve více prostorových dimenzích) – 1979

- B. van Leer: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, Journal of Computational Physics 32 (1979), pp. 101-136.
- P. Colella, P. R. Woodward: The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations, Journal of Computational Physics 54 (1984), pp. 174-201.
- P. Colella: Multidimensional Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 87 (1990), pp. 171-200.

Metody Godunovova typu vyšších řádů (ve více prostorových dimenzích) – 1979

- E. F Toro: Riemann Problems and the WAF Method for the Two-Dimensional Shallow Water Equations, College of Aeronautics Report No. 9005 England (1990).
- R. J. LeVeque: Simplified Multi-Dimensional Flux Limiter Methods, ICFD Conference on Mumerical Methods for Fluid Dynamics, UK (1992).
- Uplatnění principu upwindingu (podle rychlostí šíření změn řešení) i ve více dimenzích, využití řešení Riemannova problému, rekonstrukce vyšších stupňů.

Metody Godunovova typu vyšších řádů (ve více prostorových dimenzích) – 1979

- E. F Toro: Riemann Problems and the WAF Method for the Two-Dimensional Shallow Water Equations, College of Aeronautics Report No. 9005 England (1990).
- R. J. LeVeque: Simplified Multi-Dimensional Flux Limiter Methods, ICFD Conference on Mumerical Methods for Fluid Dynamics, UK (1992).
- Uplatnění principu upwindingu (podle rychlostí šíření změn řešení) i ve více dimenzích, využití řešení Riemannova problému, rekonstrukce vyšších stupňů.

Metody Godunovova typu vyšších řádů (ve více prostorových dimenzích) – 1979

- E. F Toro: Riemann Problems and the WAF Method for the Two-Dimensional Shallow Water Equations, College of Aeronautics Report No. 9005 England (1990).
- R. J. LeVeque: Simplified Multi-Dimensional Flux Limiter Methods, ICFD Conference on Mumerical Methods for Fluid Dynamics, UK (1992).
- Uplatnění principu upwindingu (podle rychlostí šíření změn řešení) i ve více dimenzích, využití řešení Riemannova problému, rekonstrukce vyšších stupňů.

Vlastnosti metod, konvergence

- A. Harten: High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 49 (1983), pp. 357-393. Zavedení vlastnosti TVD (TVNI), formulována Hartenova věta, konstruovánä metoda s vlastností TVD, diskutována problematika soustav a konvergence k entropickému řešení.
- A. Harten, P. D. Lax: On a Class of High Resolution Total-Variation-StableFinite-Difference Schemes, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 1-23. Podobná tématika, problematika implicitních metod, konvergence k entropickému řešení, výpočet ustálených řešení.
- P. K. Sweby: High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 995-1011. Analýza a srovnání přepínacích funkcí mezi toky prvního a vyššího řádu.

Vlastnosti metod, konvergence

- A. Harten: High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 49 (1983), pp. 357-393. Zavedení vlastnosti TVD (TVNI), formulována Hartenova věta, konstruovánä metoda s vlastností TVD, diskutována problematika soustav a konvergence k entropickému řešení.
- A. Harten, P. D. Lax: On a Class of High Resolution Total-Variation-StableFinite-Difference Schemes, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 1-23. Podobná tématika, problematika implicitních metod, konvergence k entropickému řešení, výpočet ustálených řešení.
- P. K. Sweby: High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 995-1011. Analýza a srovnání přepínacích funkcí mezi toky prvního a vyššího řádu.

Vlastnosti metod, konvergence

- A. Harten: High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 49 (1983), pp. 357-393. Zavedení vlastnosti TVD (TVNI), formulována Hartenova věta, konstruovánä metoda s vlastností TVD, diskutována problematika soustav a konvergence k entropickému řešení.
- A. Harten, P. D. Lax: On a Class of High Resolution Total-Variation-StableFinite-Difference Schemes, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 1-23. Podobná tématika, problematika implicitních metod, konvergence k entropickému řešení, výpočet ustálených řešení.
- P. K. Sweby: High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 995-1011. Analýza a srovnání přepínacích funkcí mezi toky prvního a vyššího řádu.

Vlastnosti metod, konvergence

- J. B. Goodman, R. J. LeVeque: On the Accuracy of Stable Schemes for 2D Scalar Conservation Laws, Mathematics of Computation 45 (1985), pp. 15-21. TVD metody ve dvou prostorových dimenzích jsou prvního řádu.
- J. D. Towers: TVD Schemes for Two-Dimensional Scalar Conservation Laws, Conservation Laws Preprint Server (2001), `http://www.math.ntnu.no/conservation/2001/001.html`. V předchozím článku dokázáno, že nelze zkonstruovat metodu ve 2D, které je v konzervativním tvaru, formálně druhého řádu, má vlastnost TVD a má pevnou lokální šablonu. Vytvoření TVD aproximace 2. řádu ve 2D.
- Je zkoumáno řada dalších vlastností. Problematika formálního a „skutečného“ řádu, konvergence, nezápornosti řešení, udržení ustálených stavů apod. Je třeba zkoumat, co znamená, že metoda „funguje“, a co znamená, že je metoda „lepší“ než jiná.

Vlastnosti metod, konvergence

- J. B. Goodman, R. J. LeVeque: On the Accuracy of Stable Schemes for 2D Scalar Conservation Laws, Mathematics of Computation 45 (1985), pp. 15-21. TVD metody ve dvou prostorových dimenzích jsou prvního řádu.
- J. D. Towers: TVD Schemes for Two-Dimensional Scalar Conservation Laws, Conservation Laws Preprint Server (2001), `http://www.math.ntnu.no/conservation/2001/001.html`. V předchozím článku dokázáno, že nelze zkonstruovat metodu ve 2D, které je v konzervativním tvaru, formálně druhého řádu, má vlastnost TVD a má pevnou lokální šablonu. Vytvoření TVD aproximace 2. řádu ve 2D.
- Je zkoumáno řada dalších vlastností. Problematika formálního a „skutečného“ řádu, konvergence, nezápornosti řešení, udržení ustálených stavů apod. Je třeba zkoumat, co znamená, že metoda „funguje“, a co znamená, že je metoda „lepší“ než jiná.

Vlastnosti metod, konvergence

- J. B. Goodman, R. J. LeVeque: On the Accuracy of Stable Schemes for 2D Scalar Conservation Laws, Mathematics of Computation 45 (1985), pp. 15-21. TVD metody ve dvou prostorových dimenzích jsou prvního řádu.
- J. D. Towers: TVD Schemes for Two-Dimensional Scalar Conservation Laws, Conservation Laws Preprint Server (2001), `http://www.math.ntnu.no/conservation/2001/001.html`. V předchozím článku dokázáno, že nelze zkonstruovat metodu ve 2D, které je v konzervativním tvaru, formálně druhého řádu, má vlastnost TVD a má pevnou lokální šablonu. Vytvoření TVD aproximace 2. řádu ve 2D.
- Je zkoumáno řada dalších vlastností. Problematika formálního a „skutečného“ řádu, konvergence, nezápornosti řešení, udržení ustálených stavů apod. Je třeba zkoumat, co znamená, že metoda „funguje“, a co znamená, že je metoda „lepší“ než jiná.

Vývoj technik pro rekonstrukci

- V Godunovově metodě je použita po částech konstantní rekonstrukce, tj. v každém prostorovém bilančním intervalu je přibližné řešení konstruováno jako konstantní funkce s hodnotou příslušného integrálního průměru (na dané časové vrstvě aproximujeme tedy pomocí po částech konstantní funkce).
- B. van Leer: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, Journal of Computational Physics 32 (1979), pp. 101-136. Provedl zobecnění: navrhl použití po částech lineární rekonstrukce. Aby byla zaručena vlastnost TVD, je třeba speciálním způsobem modifikovat směrnice.
- S. Osher, S. Chakravarthy: High Resolution Schemes and the Entropy Condition, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 955-984. TVD metody degenerují na první řád v bodech, ve kterých řešení nabývá extrému.

Vývoj technik pro rekonstrukci

- V Godunovově metodě je použita po částech konstantní rekonstrukce, tj. v každém prostorovém bilančním intervalu je přibližné řešení konstruováno jako konstantní funkce s hodnotou příslušného integrálního průměru (na dané časové vrstvě aproximujeme tedy pomocí po částech konstantní funkce).
- B. van Leer: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, Journal of Computational Physics 32 (1979), pp. 101-136. Provedl zobecnění: navrhl použití po částech lineární rekonstrukce. Aby byla zaručena vlastnost TVD, je třeba speciálním způsobem modifikovat směrnice.
- S. Osher, S. Chakravarthy: High Resolution Schemes and the Entropy Condition, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 955-984. TVD metody degenerují na první řád v bodech, ve kterých řešení nabývá extrému.

Vývoj technik pro rekonstrukci

- V Godunovově metodě je použita po částech konstantní rekonstrukce, tj. v každém prostorovém bilančním intervalu je přibližné řešení konstruováno jako konstantní funkce s hodnotou příslušného integrálního průměru (na dané časové vrstvě aproximujeme tedy pomocí po částech konstantní funkce).
- B. van Leer: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, Journal of Computational Physics 32 (1979), pp. 101-136. Provedl zobecnění: navrhl použití po částech lineární rekonstrukce. Aby byla zaručena vlastnost TVD, je třeba speciálním způsobem modifikovat směrnice.
- S. Osher, S. Chakravarthy: High Resolution Schemes and the Entropy Condition, SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), pp. 955-984. TVD metody degenerují na první řád v bodech, ve kterých řešení nabývá extrému.

Vývoj technik pro rekonstrukci

- A. Harten, S. Osher: Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes. I, SIAM Journal on Numerical Analysis 24 (1987), pp. 279-309. Návrh přístupů, při jejich aplikaci nenarůstá počet extrémů přibližného řešení s rostoucím časem.Tyto metody zachovávají monotónii. Má-li metoda vlastnost TVD, zachovává monotónii.
- A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R. Chakravarthy: Uniformly High Order Accurate Essentially Nonoscillatory Schemes. III, Journal of Computational Physics 71 (1987), pp. 231-303. E(ssentially) N(on)O(scillatory) Schemes. Podrobnější rozbor ENO metod.
- C. W. Shu: TVB Uniformly High-Order Schemes for Conservation Laws, Mathematics of Computation 49 (1987), pp. 105-121. Podobný přístup, ale s pevnou šablonou.

Vývoj technik pro rekonstrukci

- A. Harten, S. Osher: Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes. I, SIAM Journal on Numerical Analysis 24 (1987), pp. 279-309. Návrh přístupů, při jejich aplikaci nenarůstá počet extrémů přibližného řešení s rostoucím časem.Tyto metody zachovávají monotónii. Má-li metoda vlastnost TVD, zachovává monotónii.
- A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R. Chakravarthy: Uniformly High Order Accurate Essentially Nonoscillatory Schemes. III, Journal of Computational Physics 71 (1987), pp. 231-303. E(ssentially) N(on)O(scillatory) Schemes. Podrobnější rozbor ENO metod.
- C. W. Shu: TVB Uniformly High-Order Schemes for Conservation Laws, Mathematics of Computation 49 (1987), pp. 105-121. Podobný přístup, ale s pevnou šablonou.

Vývoj technik pro rekonstrukci

- A. Harten, S. Osher: Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes. I, SIAM Journal on Numerical Analysis 24 (1987), pp. 279-309. Návrh přístupů, při jejich aplikaci nenarůstá počet extrémů přibližného řešení s rostoucím časem.Tyto metody zachovávají monotónii. Má-li metoda vlastnost TVD, zachovává monotónii.
- A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R. Chakravarthy: Uniformly High Order Accurate Essentially Nonoscillatory Schemes. III, Journal of Computational Physics 71 (1987), pp. 231-303. E(ssentially) N(on)O(scillatory) Schemes. Podrobnější rozbor ENO metod.
- C. W. Shu: TVB Uniformly High-Order Schemes for Conservation Laws, Mathematics of Computation 49 (1987), pp. 105-121. Podobný přístup, ale s pevnou šablonou.

Vývoj technik pro rekonstrukci

- X. D. Liu, S. Osher, T. Chan: Weighted essentially non-oscillatory schemes, Journal of Computational Physics 115 (1994), pp. 200–212. Zavedení metod typu WENO.
- T. Sonar: Optimal Recovery Using Thin Plate Splines in Finite Volume Methods for the Numerical Solution of Hyperbolic Conservation Laws, IMA Journal of Numerical Analysis 16 (1996), pp. 549-581. Využití TPS (Thin Plate Splines). $\Delta^2 U = 0$.

Vývoj technik pro rekonstrukci

- X. D. Liu, S. Osher, T. Chan: Weighted essentially non-oscillatory schemes, Journal of Computational Physics 115 (1994), pp. 200–212. Zavedení metod typu WENO.
- T. Sonar: Optimal Recovery Using Thin Plate Splines in Finite Volume Methods for the Numerical Solution of Hyperbolic Conservation Laws, IMA Journal of Numerical Analysis 16 (1996), pp. 549-581. Využití TPS (Thin Plate Splines). $\Delta^2 U = 0$.

Přibližné Riemannovy řešiče

- Součástí přesného Riemannova řešiče je (v případě nelineárních soustav) je řešení soustav nelineárních rovnic a počátečních úloh pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto úlohy řešíme v každém prostorovém a časovém kroku.
- Vzhledem k tomu, že se používá relativně jemná diskretizace, je možné zachytit jednotlivé rázové vlny, vlny zředění, kontaktní nespojitosti. Stačí tedy používat přibližné Riemannovy řešiče.

Přibližné Riemannovy řešiče

- Součástí přesného Riemannova řešiče je (v případě nelineárních soustav) je řešení soustav nelineárních rovnic a počátečních úloh pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto úlohy řešíme v každém prostorovém a časovém kroku.
- Vzhledem k tomu, že se používá relativně jemná diskretizace, je možné zachytit jednotlivé rázové vlny, vlny zředění, kontaktní nespojitosti. Stačí tedy používat přibližné Riemannovy řešiče.

Přibližné Riemannovy řešiče

- B. Engquist, S. Osher: One-sided difference schemes and transonic flow, Proceedings of the National Academy of Sciences 77 (1980), pp. 3071-3074.
- Liší se od Godunovovy metody pouze v případě transsonické rázové vlny. Metoda konverguje k entropickému řešení. Implicitní verzi lze snadno realizovat. Dobrá aproximace stacionárních rázových vln. Malý počet okrajových podmínek.

Přibližné Riemannovy řešiče

- B. Engquist, S. Osher: One-sided difference schemes and transonic flow, Proceedings of the National Academy of Sciences 77 (1980), pp. 3071-3074.
- Liší se od Godunovovy metody pouze v případě transsonické rázové vlny. Metoda konverguje k entropickému řešení. Implicitní verzi lze snadno realizovat. Dobrá aproximace stacionárních rázových vln. Malý počet okrajových podmínek.

Přibližné Riemannovy řešiče

- P. L. Roe: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, Journal of Computational Physics 43 (1981), pp. 357-372.
- Přibližný řešič se speciální linearizací: zachování rychlosti rázové vlny v případě samotné rázové vlny. Postup pro získání Roeovy matice.

Přibližné Riemannovy řešiče

- P. L. Roe: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, Journal of Computational Physics 43 (1981), pp. 357-372.
- Přibližný řešič se speciální linearizací: zachování rychlosti rázové vlny v případě samotné rázové vlny. Postup pro získání Roeovy matice.

Přibližné Riemannovy řešiče

- A. Harten, P. D. Lax, B. Van Leer: On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, SIAM Review 25 (1983), pp. 35-61.
- Navržen HLL přibližný Riemannův řešič s jedním mezistavem(studovány jsou ale i další řešiče). Konvergence k entropickému řešení.

Přibližné Riemannovy řešiče

- A. Harten, P. D. Lax, B. Van Leer: On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, SIAM Review 25 (1983), pp. 35-61.
- Navržen HLL přibližný Riemannův řešič s jedním mezistavem(studovány jsou ale i další řešiče). Konvergence k entropickému řešení.

Přibližné Riemannovy řešiče

- B. Einfeldt: On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics, SIAM Journal on Numerical Analysis 25 (1988), pp. 294-318.
- Navržen HLLE přibližný Riemannův řešič. Realizace metody HLL s modifikací. Konvergence k entropickému řešení. Nezápornost řešení.

Přibližné Riemannovy řešiče

- B. Einfeldt: On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics, SIAM Journal on Numerical Analysis 25 (1988), pp. 294-318.
- Navržen HLLE přibližný Riemannův řešič. Realizace metody HLL s modifikací. Konvergence k entropickému řešení. Nezápornost řešení.

Přibližné Riemannovy řešiče

- Řada dalších článků (Toro, Linde, . . .).
- Různé další modifikace (více než jeden mezistav, snížení numerické vazkosti.

Přibližné Riemannovy řešiče

- Řada dalších článků (Toro, Linde, . . .).
- Různé další modifikace (více než jeden mezistav, snížení numerické vazkosti.

Metody bez Riemannova řešiče

- H. Nessyahu, E. Tadmor: Non-Oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 87 (1990), pp. 408-463.
- Rekonstrukce z integrálních průměrů je realizována tak, aby na hranicích kontrolních objemů byla rekonstrukce hladká. Není tedy třeba použít Riemannův řešič. Nejjednodušší metodou bez Riemannova řešiče je Laxova-Friedrichsova metoda. Metoda typu central-upwind je totožná s HLL řešičem.

Metody bez Riemannova řešiče

- H. Nessyahu, E. Tadmor: Non-Oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics 87 (1990), pp. 408-463.
- Rekonstrukce z integrálních průměrů je realizována tak, aby na hranicích kontrolních objemů byla rekonstrukce hladká. Není tedy třeba použít Riemannův řešič. Nejjednodušší metodou bez Riemannova řešiče je Laxova-Friedrichsova metoda. Metoda typu central-upwind je totožná s HLL řešičem.

Další směry vývoje

- Kombinace principů s jinými přístupy: s konečnými prvky (DGFEM), metody typu spectral volume, spectral difference,
- Víceškálové přístupy. Na hrubější škále metoda konečných objemů. Na jemnější škále použity poznatky z jiného modelu. Reconstruction – averaging, reconstruction – compression, lifting – restriction, interpolation – restriction (projection).
- CFD by first order PDEs. Formulace všech problémů pomocí parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu se zdrojovými členy (efektivnější paralelizace a konvergence k ustáleným stavům).
- Konstrukce metod pro složitější modely, tvorba technik pro modelování komplexních systémů.
- ...

Další směry vývoje

- Kombinace principů s jinými přístupy: s konečnými prvky (DGFEM), metody typu spectral volume, spectral difference,
- Víceškálové přístupy. Na hrubější škále metoda konečných objemů. Na jemnější škále použity poznatky z jiného modelu. Reconstruction – averaging, reconstruction – compression, lifting – restriction, interpolation – restriction (projection).
- CFD by first order PDEs. Formulace všech problémů pomocí parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu se zdrojovými členy (efektivnější paralelizace a konvergence k ustáleným stavům).
- Konstrukce metod pro složitější modely, tvorba technik pro modelování komplexních systémů.
- ...

Další směry vývoje

- Kombinace principů s jinými přístupy: s konečnými prvky (DGFEM), metody typu spectral volume, spectral difference,
- Víceškálové přístupy. Na hrubější škále metoda konečných objemů. Na jemnější škále použity poznatky z jiného modelu. Reconstruction – averaging, reconstruction – compression, lifting – restriction, interpolation – restriction (projection).
- CFD by first order PDEs. Formulace všech problémů pomocí parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu se zdrojovými členy (efektivnější paralelizace a konvergence k ustáleným stavům).
- Konstrukce metod pro složitější modely, tvorba technik pro modelování komplexních systémů.
- ...

Další směry vývoje

- Kombinace principů s jinými přístupy: s konečnými prvky (DGFEM), metody typu spectral volume, spectral difference,
- Víceškálové přístupy. Na hrubější škále metoda konečných objemů. Na jemnější škále použity poznatky z jiného modelu. Reconstruction – averaging, reconstruction – compression, lifting – restriction, interpolation – restriction (projection).
- CFD by first order PDEs. Formulace všech problémů pomocí parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu se zdrojovými členy (efektivnější paralelizace a konvergence k ustáleným stavům).
- Konstrukce metod pro složitější modely, tvorba technik pro modelování komplexních systémů.
- …